

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03267

研究課題名（和文）ユニタリ推移作用素の幾何解析

研究課題名（英文）Geometric analysis for unitary transition operators

研究代表者

楯 辰哉（Tate, Tatsuya）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：00317299

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：ユニタリ推移作用素とはグラフ上で定義されたユニタリ作用素で、いわゆる有限伝搬性を持つものだが、現在ではこの意味においても通常は量子ウォークと呼ばれている。当初、高次元整数格子上の量子ウォークの弱極限分布の幾何学的な考察による導出、半古典極限に関する問題、そして特異連続スペクトルを持つ量子ウォークの問題、を考えていた。これらについて解決には程遠いのが現状であるが、特に最後の問題に関連して、ある程度一般の1次元の固有関数展開定理を得ることができた。今後はこれを用いてより体系的な議論が可能で、その一環として特異連続量子ウォークも扱える可能性もあり、一定の貢献ができたものと思っている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォークは量子論的な事象のコンピュータ・シミュレーションにしばしば応用される。したがって量子ウォークを定義するコイン行列と量子ウォークの挙動との理論上の関連を調べることは、応用に対する理論的な裏付けを与える重要な研究である。本研究においては、ある程度一般な1次元量子ウォークに対して、量子ウォークを簡単な作用素に変換するフーリエ変換の類似物、つまり一般固有関数展開定理、をコイン行列の言葉で書き下すことに成功した。さらにその計算に必要なレゾルベントに関する性質も導くことができた。今後は、これを用いてコイン行列と力学的挙動との関連を理論的かつ定量的に調べるのが可能になるものと期待している。

研究成果の概要（英文）：Unitary transition operators are unitary operators defined on graphs with certain finite propagation property. Quantum walks are examples of unitary transition operators. But recently the word "quantum walk" means unitary transition operators in the above sense. In the first stage of the research, the aim was to study problems on geometrical deduction for weak limits of quantum walks on integer lattices, on semiclassical analysis and on quantum walks with singular continuous spectrum. Although the situation on these problems is still far from resolved, the researches in this program have made a certain contribution, in particular to the last problem, because the generalized eigenfunction expansion formula has been obtained. Many of previous researches on quantum walks were made for each individual models in case-by-case. But it will be expected that the generalized eigenfunction expansion formula will give a unified method to handle 1-dimensional quantum walks systematically.

研究分野：離散幾何解析

キーワード：ユニタリ推移作用素 量子ウォーク 結晶格子 局在 一般固有関数展開

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

H25年度~H29年度(課題番号 25400068)により、量子ウォークを離散幾何解析学としての立場から研究し、1次元定数コイン量子ウォークの代数的側面、結晶格子上的周期的ユニタリ推移作用素の導入とスペクトル論的な性質、特殊な周期的ユニタリ推移作用素の局在について調べていた。しかし例えば弱極限分布の導出については全く手付かずであった。また、Fillmanらの考察した量子ウォークのあるモデルは特異連続スペクトルを持ち、周期的なケースに収まらないものであった。さらに半古典解析的な問題は数値実験的な先行研究はあるものの、1次元ですら理論的な結果はないという状況であった。

2. 研究の目的

(1) 周期的量子ウォークの最も簡単なものは1次元2状態の定数コイン量子ウォークである。その弱極限分布は球面へのある群作用に関するモーメント写像を用いて記述されることは、以前からわかっていた。そのため、研究課題において高次元の整数格子上的周期的ユニタリ推移作用素の弱極限分布を、幾何学的に先見的に発見することを目標の一つとした。

(2) 周期的でない1次元量子ウォークとして特にGrunbaumらが導入したRieszウォークと呼ばれる量子ウォークは特異連続スペクトルを持つ典型的な量子ウォークである。この量子ウォークの幾何解析的な性質を調べることを目的とした。

(3) 半古典解析的な問題として、2次元特殊ユニタリ群の既約表現を用いた1次元多状態量子ウォークの漸近解析を目的とした。

3. 研究の方法

(1) 1次元定数コイン量子ウォークに戻り、幾何学的に導出された弱極限分布と、量子ウォークそのものとの関連を見出すことを方針とした。

(2) Rieszウォークをエルゴード理論でよく知られている角谷の塔と呼ばれる力学系を用いて、その極限分布を調べることを方針としていた。その根拠は、角谷の塔の極大スペクトルタイプがまさにRieszウォークを定める関数で記述されているため、両者がユニタリ同値となることが観測されたためであった。

(3) 半古典極限の問題は過去から継続して研究していたが、2次元特殊ユニタリ群の既約表現空間が球面上の直線束を用いて実現され、内積を積分表示することで漸近解析を見通しよくできることが手法であった。

4. 研究成果

(1) 結晶格子上的周期的ユニタリ推移作用素についてのスペクトル論的な性質、特に局在等の性質とスペクトル性質について調べた論文を出版することができた。一方、高次元の整数格子上で弱極限分布の幾何学的な考察による先見的な導出に関する研究については、1次元定数コインの場合ではいわゆる今野分布を幾何学的に導出することになり、分布自身は幾何学的に構成される写像で見出すことはできていた。しかしそれが弱極限分布となることを、今までのような解析的な手法ではなく何らかの幾何学的な証明方法を見出す必要があり、そこが成功していない。今後の課題として残っている。

(2) Rieszウォークは角谷の塔を使用した力学系とユニタリ同値となることは分かっていたが、Rieszウォークの弱極限分布を計算できるほどに簡単にはならなかった。そこで考え方を換え、一般の1次元2状態の量子ウォークを体系的に扱う理論構築を優先させた。そのために参考にしたのは、Sturm-Liouville微分作用素の理論で知られている一般固有関数展開定理である。ここでは、作用素の一般化固有関数を用いて作用素に適したフーリエ変換を構成し、それを用いて作用素自身を簡単にするものである。量子ウォークはユニタリ作用素でありスペクトル分解が可能であるが、スペクトル射影作用素は具体的に与えられているものではなく、解析は困難である。一方で、一般化固有関数展開定理ではプランシェレル公式が得られるが、そこに現れる測度はレゾルベントの境界値として導出されるものであり、スペクトル射影作用素と違って2次元行列値の測度である。このSturm-Liouville微分作用素に対して知られるWeyl, Titchmarsh, Stone, 小平の理論が、実はほぼそのまま1次元2状態量子ウォークでも成り立つことが分かった。実はGetstesyらによるCMV行列に対する先行研究があった。ここで得られた結果は1次元2状態の量子ウォークというCMV行列の特殊な場合でありGetstesyらの結果に含まれている。しかし、Getstesyらの結果は具体例に対して適用されていないが、ここで与えた手法は量子ウォーク特有の性質をフルに使用し直接的に得られるもので、実際に定数コイン以外の具体例の計算も可能であり、優れた側面を持つ結果であると思っている。

(3) 半古典極限の問題は過去から継続して研究している。今まで得られていたものは、表現ウェイトと時間の間のある相関を入れた場合でのウェイト無限大のときの平均の漸近挙動であった。これだけでも興味深い結果であるかもしれない、一度は論文にまとめることも考えたのであるが、表現ウェイトと時間の間の相関があまり思わしくなく、例えば中心極限定理と言えるような弱極限定理を得るためには不十分であった。しかし研究期間最終年度(2023 年度)に、平均を漸近的にではなく具体的に計算する方法を発見した。これには表現空間を多項式空間として実現し、内積を球面上の積分で表現したことが大きく寄与する計算方法である。この方法は容易に分散の計算にも適用できるが、今後はこの計算結果を用いて、極限定理の研究につなげたい。

(4) 当初想定していなかった問題であるが、量子ウォークよりも扱いが多少簡単な通常の正則グラフ上のラプラシアンについても研究を行った。量子ウォークの研究からの理由は正則有限グラフ上ではグローバウォークと呼ばれる特殊な量子ウォークとラプラシアンの固有値は密接に関連することがわかっているためであるが、ラプラシアンの固有値の特性を調べることは一般に離散幾何解析学として重要である。この研究は内藤久資氏(名古屋大学)と大森俊明氏(当時東京理科大)との共同研究で、有限3正則グラフのいわゆる Goldberg-Coxeter 細分という細分を行った際の固有値の変化を研究した。Goldberg-Coxeter 細分を行うことでグラフの頂点数は増えラプラシアンの固有値は多くなるが、それらを元々のグラフのラプラシアンの固有値で評価することができた。さらに、Goldberg-Coxeter 細分を行うと、元々のグラフとは関連の見えない重複度の非常に大きな固有値が出現することを証明した。この固有値が発生する理由を解明するという問題は今後の課題として残っている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Tate Tatsuya	4. 巻 13
2. 論文標題 An eigenfunction expansion formula for one-dimensional two-state quantum walks	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s43034-022-00210-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Tate Tatsuya	4. 巻 22
2. 論文標題 Eigenvalues, absolute continuity and localizations for periodic unitary transition operators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 1950011 ~ 1950011
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219025719500115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Omori Toshiaki, Naito Hisashi, Tate Tatsuya	4. 巻 26
2. 論文標題 Eigenvalues of the Laplacian on the Goldberg-Coxeter Constructions for 3- and 4-valent Graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 3.7(31pp)
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.37236/8481	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Tatsuya Tate
2. 発表標題 Spectral properties of magnetic Laplacian on a catenoid
3. 学会等名 International conference on Discrete Geometric Analysis for Materials Design（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tatsuya Tate
2. 発表標題 Eigenvalues of the Laplacian on the Goldberg-Coxeter constructions for 3- and 4-valent graphs
3. 学会等名 Materials Research Meeting 2019, Symposium B-3: Mathematical Materials Science (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tatsuya Tate
2. 発表標題 Generalized eigenfunction expansion formula for one-dimensional two-state quantum walks
3. 学会等名 RIMS 共同研究「量子ウォークにおける長時間挙動の研究」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tatsuya Tate
2. 発表標題 Spectral properties of a Laplacian in a magnetic field on a catenoid
3. 学会等名 Frontiers of Riemannian Geometry (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Stabilities in Kahler geometry and related topics	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------