様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２６１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２７１

研究課題名（和文）四元数多様体の複素部分多様体論の展開

研究課題名（英文）The differential geometry of complex submanifolds of a quaternionic manifold

研究代表者
塚田　和美（Tsukada, Kazumi）

お茶の水女子大学・無し・名誉教授

研究者番号：３０１６３７６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：四元数ケーラー対称空間である結合的グラスマン多様体、実ベクトル空間 R^n の4次元部分空間のなす実グラスマン多様体Gr_4(R^n)を対象に研究し次のような成果を得た。6次元球面と結合的グラスマン多様体への双ファイブレーションを構成し、両者の部分多様体間の興味深い関係を調べた。Gr_4(R^n)のツイスター空間のルジャンドル部分多様体に対する複素Lie球面幾何学の視点からの基礎理論を整備し、Gr_4(R^n)の全複素部分多様体への応用を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の目標は四元数多様体の複素部分多様体に関する理論を発展させることにある。これらは四元数ケーラー対称空間の良い性質をもつ部分多様体であると理解され、4次元球面の曲面に関する理論の自然な高次元化とみることもできる。本研究は複素微分幾何と四元数微分幾何が相互作用する四元数複素微分幾何学とでも呼ぶべき興味深い研究領域をなす。Gr_4(R^n)に関わる成果は複素Lie球面幾何学の視点によるGr_4(R^n)の四元数微分幾何学研究の先駆けとなるもので、今後の研究の発展が期待される。

研究成果の概要（英文）：We studied the associative Grassmann manifold and the real Grassmann manifold Gr_4(R^n) of all four-dimensional subspaces in the real vector space R^n, which are quaternionic Kaehler symmetric spaces and obtained the following results. We constructed a double fibration to a six-dimensional sphere and an associative Grassmann manifold and investigated interesting relationships between the submanifolds of both. We developed a basic theory from the view point of complex Lie sphere geometry for Legendrian submanifolds of the twister space of Gr_4(R^n) and obtained applications to totally complex submanifolds of Gr_4(R^n).

研究分野：微分幾何学

キーワード：四元数ケーラー多様体　全複素部分多様体　結合的グラスマン多様体　実グラスマン多様体　6次元球面　ツイスター空間　ルジャンドル部分多様体　複素Lie 球面幾何学

様　式　C－１９、F－１９－１（共通）

1. 研究開始当初の背景

数の世界は，次のように拡張されている：　$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.　ここで，$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ はそれぞれ実数，複素数，四元数全体を表す．実ベクトル空間，複素ベクトル空間とその上の解析学に基づき，多様体，複素多様体がそれぞれ定義される．さらに，ユークリッド幾何学の一般化として，リーマン計量が備えられたリーマン多様体，複素多様体の構造に適合する計量が備えられたケーラー多様体が設定され，実り豊かな美しい理論が展開されている．四元数多様体及び四元数ケーラー多様体は，それぞれ複素多様体，ケーラー多様体の四元数に対応するアナロジーとして考えられた対象である．これらを対象とする微分幾何学は興味深い研究領域になってきている．特に，四元数ケーラー多様体の部分多様体論，調和写像論は大きく発展してきている．

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の 複素 1 次元部分空間全体の集合を $\mathbb{C}P^n$ で表し，四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ 内の 四元数 1 次元部分空間全体の集合を $\mathbb{H}P^n$ で表す．複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ は複素多様体，ケーラー多様体の典型例として知られており，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ は四元数多様体，四元数ケーラー多様体の典型例である．複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ は $\mathbb{H}^{n+1}$ の部分空間であるから, $\mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{H}P^n$ の部分多様体となることが分かる．部分多様体 $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{H}P^n$ は本研究の対象「四元数多様体の複素部分多様体」の典型例である．このような対象に着目した主な理由は次の 2 点である．

(i) 研究代表者は $\mathbb{H}P^n$ の第 2 基本形式が平行となる部分多様体の分類に取り組んだ．その中で全複素部分多様体は重要な位置を占めることが明らかになった ([2])．ここで分類された全複素部分多様体は, 様々な研究者に興味を持たれ研究が進展した．他の四元数ケーラー対称空間や等質四元数多様体についても同様に複素部分多様体は重要で，興味深い性質をもつ対象であることが期待される．

(ii) Burstall らは, 4 次元球面 S^4 の曲面に関する共形幾何学について, S^4 を 四元数射影直線 $\mathbb{H}P^1$ と見ることにより, 四元数幾何学の立場で定式化し, その研究に大きな進展をもたらした ([1])．彼らの理論の高元化を次のように考えるのは自然であろう：

S^4 の曲面（リーマン面）　$\Rightarrow$　$\mathbb{H}P^n$ の半分次元 “複素部分多様体”

2. 研究の目的

最初に本研究の鍵となる概念である四元数多様体，横断的複素部分多様体，全複素部分多様体の定義を述べておく．$\tilde{M}^{4n}$ を $4n (n \geq 2)$ 次元多様体とし, $\tilde{Q}$ を End $T\tilde{M}$ の 3 次元部分束で次の条件をみたすものとする:

(a) $\tilde{M}$ の各点 の近傍で定義された $\tilde{Q}$ の局所枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ で, $\tilde{I}^2 = \tilde{J}^2 = \tilde{K}^2 = -\mathrm{id}$, $\tilde{I}\tilde{J} = -\tilde{J}\tilde{I} = \tilde{K}$, $\tilde{J}\tilde{K} = -\tilde{K}\tilde{J} = \tilde{I}$, $\tilde{K}\tilde{I} = -\tilde{I}\tilde{K} = \tilde{J}$ をみたすものが存在する．

(b) 捩率零のアファイン接続で, End $T\tilde{M}$ の中で $\tilde{Q}$ を平行にするものが存在する．

このとき，$\tilde{Q}$ を $\tilde{M}$ 上の四元数構造といい，$\tilde{Q}$ を備えた多様体 $\tilde{M}$ を四元数多様体という．四元数構造 $\tilde{Q}$ に適合する（擬）リーマン計量 $\tilde{g}$ をもちかつこのリーマン接続が End $T\tilde{M}$ の中で $\tilde{Q}$ を平行にするとき, $(\tilde{g}, \tilde{Q})$ を 四元数（擬）ケーラー構造といい，$(\tilde{g}, \tilde{Q})$ を備えた多様体 $\tilde{M}$ を四元数（擬）ケーラー多様体という．四元数多様体 $(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q})$ の部分多様体 M^{2m} が横断的複素部分多様体 であるとは, $\tilde{Q}|_M$ の大域的な切断 $\tilde{I}$ が存在して (1) $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}$, (2) $\tilde{I}(TM) = TM$, (3) $\langle \tilde{I}, \tilde{J} \rangle = 0$ をみたす任意の $\tilde{J} \in \tilde{Q}|_M$ について $\tilde{J}(TM) \cap TM = \{0\}$ が成り立つときをいう．$m \geq 2$ のとき, $\tilde{I}$ から誘導された M の概複素構造は積分可能となり, M は複素多様体になる．四元数（擬）ケーラー多様体

$(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の横断的複素部分多様体 M^{2m} が, 上記 (3) において $\tilde{J}(TM) \perp TM$ をみたすとき，特に全複素部分多様体 という.

本研究は四元数多様体及び四元数（擬）ケーラー多様体の横断的複素部分多様体あるいは全複素部分多様体を対象とし，次の課題を明らかにすることを目的とする.

課題 1. 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体について，これまでの研究成果を発展させ, Bäcklund 変換に相当する変換の理論の構築や，Willmore 汎関数に相当するような新たな汎関数を見出しその汎関数の変分問題の解となる部分多様体の研究を行う.

課題 2. 四元数（擬）ケーラー対称空間の等質全複素部分多様体の構成及び分類，四元数幾何学的各種不変量によるそれらの特徴付けを行う.

3. 研究の方法

鍵となる方法は,「ツイスター空間の理論」,「ベクトル束の議論」の 2 つである.

(1) ツイスター空間の理論：四元数微分幾何学を展開する際，ツイスター空間を導入して複素微分幾何学を援用するのは有効な方法である．四元数多様体 $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ に対して，$\mathcal{Z} = \{\tilde{I} \in \tilde{Q} | \tilde{I}^2 = -\mathrm{id}\}$ は $\tilde{M}$ 上の S^2-束で, $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ のツイスター空間と呼ばれている．$\mathcal{Z}$ は自然に複素多様体の構造をもつ．リッチ曲率が消えない四元数ケーラー多様体上の ツイスター空間は正則接触構造をもつ．リッチ曲率が消えない四元数ケーラー多様体 $\tilde{M}$ に対し，その全複素部分多様体 M の自然なリフト $\tilde{I}(M)$ は, $\mathcal{Z}$ の複素部分多様体であり，正則接触構造に関する積分多様体となる．またその逆も成立するという興味深い関係がある．特に，$\tilde{M}$ の半分次元全複素部分多様体と $\mathcal{Z}$ の複素ルジャンドル部分多様体とが対応関係にある．このような関係は全複素部分多様体の構成・分類，モジュライ空間の構成などの問題に良い方法を与える.

(2) ベクトル束の議論：本研究では射影空間も含め各種グラスマン多様体が主な対象になる．グラスマン多様体を扱う際ベクトル束の議論に帰着させることが有効である.

4. 研究成果

研究目的に掲げた課題 1 については，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の横断的複素部分多様体に関する基礎理論を整備, 発展させ，2021 年に論文として発表した (Tohoku Math. J.). その主な内容は，横断的複素部分多様体を捉える基本的な不変量である 第 2 基本形式の $(2,0)+(0,2)$-part σ_+ やガウス写像 S の定義及びその基本的な性質の解明，それらの不変量を用いた特別なクラスの横断的複素部分多様体の特徴付けなどである．Bäcklund 変換に相当する変換の理論の構築や，Willmore 汎関数に相当するような新たな汎関数の導出については種々試みたが，良い結果に結びついておらず，さらなる研究を必要とする課題である.

課題 2 については，四元数ケーラー対称空間である 結合的グラスマン多様体, 実グラスマン多様体を対象に研究を進め次のような成果を得た.

(1) 結合的グラスマン多様体：$\mathbb{O}$ を八元数環（あるいはケーリー代数）とする．$\mathbb{O}$ は，四元数体 $\mathbb{H}$ を拡張したノルム代数で，積演算について結合法則は成り立たない．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ を八元数の虚部からなる部分空間とする．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ は 7 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^7$ と同一視される．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き付けられた 3 次元部分空間で四元数体と同型となる $\mathbb{O}$ の部分代数の虚部となるものを結合的という．結合的部分空間全体のなす集合を結合的グラスマン多様体といい，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ で表す．$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は 8 次元四元数ケーラー対称空間となることが知られている．結合的グラスマン多様体について本研究で得られた主な成果は (i) 興味深い横断的複素部分多様体の構成，(ii) 6 次元球面の部分多様体との関係の発見 である．それぞれ論文 (Tsukuba J. Math. 2019, Kodai Math.J. 2020) として発表した．最初に前者について述べる．W を $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の 4 次元部分空間とし，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(W)$ を W 内の向き付けられた 2 次元

部分空間のなすグラスマン多様体（4 次元）とする．$V \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_2(W)$ に対し，$f(V)$ を v_1, v_2, v_1v_2 で張られた 向き付けられた 3 次元部分空間とする．ここで，$\{v_1, v_2\}$ は V の正の向きの正規直交基底で，v_1v_2 は八元数としての積である．$f(V)$ は結合的部分空間となり，f は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(W)$ から $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ への写像を定める．

定理 1 f は横断的複素はめ込みである．さらに，$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ における W の直交補空間 $W^{\perp}$ が結合的部分空間であるとき， f は全複素、全測地的はめ込みになる．

これは興味深い例であり，幾何学的特徴付け等今後の研究の発展も期待できる．

次に 6 次元球面の部分多様体との関係について述べる．S^6 を $\mathrm{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ における原点中心の単位球面とする．S^6 の各点 p の接空間 T_pS^6 を $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の部分空間と見て， $x \in T_pS^6$ に対し，$J_px = px$ (px は八元数としての積) とおいて T_pS^6 の線形変換 J_p を定める．このとき，J は S^6 に概複素構造を定める．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の内積から誘導されるリーマン計量と合わせ，S^6 は概エルミート多様体となる．この概エルミート多様体は著しい性質をもち，多くの研究がなされている．結合的グラスマン多様体と 6 次元球面にはともに八元数環の自己同型群である G_2 が作用し等質多様体になる．この状況を受け, G_2 が作用する 11 次元等質多様体 $\tilde{M}(0)$ からこれらの 2 つの多様体への G_2 同変双ファイブレーションが構成できることを示した：

$$\chi : \tilde{M}(0) \to S^6, \qquad \pi : \tilde{M}(0) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$$

この双ファイブレーションは 2 つの多様体の幾何学を関係付ける興味深い役割を果たす.

定理 2 上のファイブレーションにおいて，各 $p \in S^6$ に対し $\pi(\chi^{-1}(p))$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の 5 次元全測地的部分多様体で，$SU(3)/SO(3)$ に等長になる．各 $\xi \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に対し $\chi(\pi^{-1}(\xi))$ は S^6 の 3 次元全測地的ラグランジュ部分多様体で，S^3 に等長になる．

$f : M \to S^6$ を 3 次元多様体 M から S^6 へのラグランジュはめ込みとする．このとき，$\nu(p) = -J_{f(p)}df(T_pM)$ は $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の結合的部分空間になる．これより，写像 $\nu : M \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ を得る．一種のガウス写像である．

定理 3 ν は調和写像である．

この事実は，S^6 のラグランジュ部分多様体の研究，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ への調和写像研究に新たな視点，方法をもたらすと思う．

(2) 実グラスマン多様体：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の向き付けられた 4 次元部分空間全体のなす実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は四元数ケーラー対称空間となることが知られている．n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の複素 2 次元部分空間で標準的な複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を制限したとき零となるもの（等方的部分空間）全体 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は（複素） $2n-7$ 次元複素多様体となり，さらに正則接触構造をもつ．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ から $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ への自然な射影が定義される．これは $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の四元数ケーラー構造に関するツイスターファイブレーションになっている．$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-2}^2 = 1$ で定義される $\mathbb{C}^{n-2}$ の複素超曲面を $\mathbb{C}S^{n-3}$ で表し，複素球面と呼ぶ．$\mathbb{C}S^{n-3}$ には $\mathbb{C}^{n-2}$ の複素内積から誘導された複素リーマン計量が入り複素リーマン多様体になる．リーマン多様体の単位接ベクトル束上に定義される接触構造のアナロジーとして，複素リーマン多様体の（複素リーマン計量に関する）単位正則接ベクトル束に正則接触構造が定義される．$\mathbb{C}S^{n-3}$ の単位正則接ベクトル束 $S(T^+\mathbb{C}S^{n-3})$ は $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$ の余次元 3 の複素部分多様体と見ることができる：

$$S(T^+\mathbb{C}S^{n-3}) = \left\{ (\boldsymbol{z}, \xi) \in \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2} \mid \ \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 1, \langle \xi, \xi \rangle = 1, \langle \boldsymbol{z}, \xi \rangle = 0 \ \right\}.$$

$(\boldsymbol{z}, \xi) \in S(T^+\mathbb{C}S^{n-3})$ に対し，${}^t({}^t\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0), {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1})$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の 2 次元部分空間を $\psi(\boldsymbol{z}, \xi)$ とおく．$\psi(\boldsymbol{z}, \xi)$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の元になる．このようにして，写像 $\psi : S(T^+\mathbb{C}S^{n-3}) \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$

が定義される． ψ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の開部分多様体への正則同型写像であり，正則接触構造を保つ．M を $n-4$ 次元複素多様体，$\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込みとし，ξ を M 上の単位法ベクトル場とする．このとき，$\hat{\varphi} = (\varphi, \xi)$ は M から $S(T^{+}\mathbb{C}S^{n-3})$ への正則はめ込みとなり，さらにルジャンドルはめ込みである．従って，$\psi \circ \hat{\varphi}$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みである．$\pi : \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ をツイスターファイブレーションとすると次が成り立つ：

定理 4 上の設定で，$\tilde{\varphi} = \pi \circ \psi \circ \hat{\varphi} : M \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は（半分次元）全複素はめ込みである．

この結果により，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面の例の構成とそれらに対応する $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の幾何学的性質の解明が今後の興味深い課題となる．

本研究では続いて複素 Lie 球面幾何学の視点から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体に対する基礎理論を構築した．最初に，基本図形となるルジャンドル部分多様体を構成する．$\kappa \in Q^{n-2} = \{[\zeta] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid \langle \zeta, \zeta \rangle = 0\}$ に対し，$Q(\kappa)$ で κ を部分空間として含む 2 次元等方的部分空間全体を表す．$Q(\kappa)$ は $n-4$ 次元複素 2 次超曲面に正則同型で，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体になる．これは（実）Lie 球面幾何学における Lie 超球面に相当する．

定義 M を $n-4$ 次元複素多様体とし，$f : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ をルジャンドルはめ込みとする．p を M の点とする．0 でない $k \in f(p)$ に対し，0 でない接ベクトル $X \in T_pM$ で $df(X)k = 0$ をみたすものが存在するとき，$[k] \in Q^{n-2}$ を点 p での f の**曲率球**といい，X を $[k]$ に対応する**主ベクトル**という．主ベクトルのなす部分空間の次元を曲率球 $[k]$ の重複度という．

曲率球の性質に着目したルジャンドル部分多様体の特徴付けは興味深い問題と思う．重複度 $n-4$ $(= \dim M)$ の唯 1 つの曲率球をもつルジャンドル部分多様体は基本図形である複素 2 次超曲面 $Q(\kappa)$ の開部分多様体である．相異なる曲率球を 2 つもつ場合についても研究した．そのモデルを示す：V を $\mathbb{C}^n$ の非退化部分空間，$V^{\perp}$ を V の直交補空間とし，$V, V^{\perp}$ それぞれの次元を $r+2, s+2$ $(r, s \geq 1)$ とする．Q^r, Q^s を それぞれ射影空間 $P(V), P(V^{\perp})$ の複素 2 次超曲面とし，正則写像 $f : Q^r \times Q^s \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $f([z],[w]) = \{z, w\}_{\mathbb{C}}$ で定める．このとき，f は各点で重複度 s, r の相異なる曲率球をもつルジャンドル埋め込みである．このモデルの特徴付けの結果を得た．

定理 5 f を $n-4$ 次元複素多様体 M から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みで，各点で重複度 s, r $(s + r = n - 4)$ の相異なる曲率球を持つものとする．このとき，f の像は上で示された例 $Q^r \times Q^s$ に含まれる．

我々の示した定理の仮定には追加の条件が課されるがここでは省いた．

実グラスマン多様体に関わる本研究の成果は複素 Lie 球面幾何学の視点による四元数微分幾何学研究の先駆けとなるものである．等質全複素部分多様体の構成・分類等の課題への応用等今後の研究の発展につなげたい．実グラスマン多様体について本研究で得られた結果は論文 [3] としてまとめ, 学術雑誌に投稿中である．

〈 引用文献 〉

[1] Burstall, F. E., Ferus, D., Leschke, K., Pedit, F. and Pinkall, U., Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions, Springer Lecture Notes in Math. Vol.1772, 2002.

[2] K.Tsukada : *Parallel submanifolds in a quaternion projective space*, Osaka J. Math. 22(1985), 187-241

[3] K. Tsukada : *Complex Lie sphere geometry and totally complex submanifolds of real Grassmann manifolds*,Preprint

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 塚田　和美	４．巻 2210
２．論文標題 Lie 球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体	５．発行年 2022年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 104-122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kazumi Tsukada	４．巻 73
２．論文標題 The Gauss maps of transversally complex submanifolds of a quaternion projective space	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20191202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 K.Enoyoshi and K.Tsukada	４．巻 43
２．論文標題 Examples of transversally complex submanifolds of the associative Grassmann manifold	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Tsukuba J. Math.	６．最初と最後の頁 23-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.21099/tkbjm/1571968819	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 K.Enoyoshi and K.Tsukada	４．巻 43
２．論文標題 Lagrangian submanifolds of S^6 and the associative Grassmann manifold	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Kodai Math.J.	６．最初と最後の頁 170-192
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj/1584345693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　3件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 塚田　和美
2．発表標題 Lie 球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体
3．学会等名 日本数学会2023年度年会
4．発表年 2023年

1．発表者名 塚田　和美
2．発表標題 Lie 球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体
3．学会等名 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2022」
4．発表年 2023年

1．発表者名 塚田　和美
2．発表標題 Lie 球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体
3．学会等名 京都大学数理解析研究所　共同研究（公開型）（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 塚田　和美
2．発表標題 四元数多様体の複素部分多様体
3．学会等名 秋葉原微分幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2020年

１．発表者名 K.Tsukada
２．発表標題 Quaternionic differential geometry of complex submanifolds in a quaternion projective space
３．学会等名 Differential Geometry and its Applications DGA 2019（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 K.Tsukada
２．発表標題 Lagrangian submanifolds of S^6 and the associative Grassmann manifold
３．学会等名 The 3rd International Workshop ``Geometry of Submanifolds and Integrable Systems''
４．発表年 2019年

１．発表者名 塚田和美
２．発表標題 ６次元球面のラグランジュ部分多様体と結合的グラスマン多様体
３．学会等名 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2019」（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 塚田和美、榎吉奏子
２．発表標題 Examples of transversally complex submanifolds of the associative Grassmann manifold
３．学会等名 日本数学会　秋季総合分科会
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	江尻　典雄 (Ejiri Norio) (80145656)	名城大学・理工学部・教授 (33919)	2021年3月まで

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関