

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03272

研究課題名（和文）部分多様体の幾何学を用いた四元数多様体の研究

研究課題名（英文）The research of quaternionic manifolds by using submanifold geometry

研究代表者

長谷川 和志（Kazuyuki, Hasegawa）

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号：50349825

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：まず、四元数多様体から超複素多様体を構成する方法(Q/H-対応)を与えた。また、その逆である超複素多様体から四元数多様体を構成する方法(H/Q-対応)も得た。具体例として、超複素ホップ多様体などの超ケーラー構造を許容しないようなものも得ることができた。特に、H/Q-対応の応用として、ある種の複素多様体から四元数多様体を構成することができるが、これはこの複素多様体の接束が四元数多様体の構造をもつことから従う。

研究成果の学術的意義や社会的意義

四元数多様体や超複素多様体は重要な研究対象であり、それらの構成は基本的なテーマである。本研究では、超複素運動量写像を用いて四元数多様体から超複素多様体を構成したが、超複素運動量写像の有用性を示したことや古典的な題材であるc-射影構造を活用して点でも学術的意義があると思われる。また、今後は物理学への応用もふまえ、更なる展開を考えていきたい。

研究成果の概要（英文）：We give a construction of a hypercomplex manifold from a quaternion manifold (Q/H-correspondence). We also find a construction of a quaternion manifold from a hypercomplex manifold (H/Q-correspondence). As a concrete example, we obtain a hypercomplex Hopf manifold, which does not allow any hyperkahler structures. In particular, as an application of H/Q-correspondence, it is possible to construct a quaternion manifold from a certain type of complex manifold, which follow from the fact that the tangent bundle of this complex manifold has the structure of a quaternion manifold.

研究分野：微分幾何学

キーワード：四元数多様体 超複素多様体 複素部分多様体 c-射影構造

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

四元数多様体は四次元の共形多様体を四元数の観点から高次元化したものと捉えることもできる。共形幾何学の発展を鑑みると、四元数多様体の幾何学も同様に“豊か”であると期待されるが、それを見るには十分な研究蓄積がないのが現状である。本研究課題では、その一助とすべく、四元数多様体について、基本的ではあるが重要なテーマである構成法を中心に考える。既知の四元数ケーラー多様体のある種の構成法に着目すると、複素多様体はそのなかの部分多様体として現れるが、研究過程においてはその役割が補助的なものであることが分かる。そこで、より一般の四元数多様体の構成において、“部分多様体の幾何学”をキーワードとして研究を進めた。

### 2. 研究の目的

目的として、

- (1) これまでのあった複素多様体から四元数多様体を構成する方法に関して、補助的な役割であった複素多様体を部分多様体の幾何学を用いて解析し、四元数多様体へ研究に反映させること、
- (2) その過程を通じて四元数多様体内の部分多様体論自身を深化・発展させること。

の2つをあげた。

### 3. 研究の方法

上記の2つの研究目的を達成するために、

- ① 四元数多様体の Swann 束と呼ばれる超複素多様体とその上の運動量写像の構成、
  - ② 代表者によってすでに得られている四元数多様体内の曲面の四元数不変量の高次元化、
  - ③ 複素多様体の接束の零切断の像の部分多様体としての外在的性質、
  - ④ ③に twist と呼ばれる操作を施し、得られた四元数多様体の不変量を調べる、
- の方法・段階に分けて研究を進めた。

### 4. 研究成果

本研究課題のテーマは上記の通り四元数多様体や超複素多様体の構成を研究することであるが、期間中に四元数/超複素-対応と超複素/四元数-対応とよぶ(ことにした)2つの構成法を得た。特に、後者は、ある種の複素多様体から四元数多様体構成する generalized supergravity c-map (後述)を応用として含むのである。

(1) **四元数/超複素-対応**: 四元数多様体において、Swann 束とよばれる超複素多様体が定義できる。まず、この Swann 束において、概超複素構造の1パラメータ族を構成した。特に、この属のなかで元の四元数多様体の四元数接続の取り方によらないパラメータの値を見出し、その概超複素構造は可積分であることも示した。これにより、四元数多様体の性質を四元数接続の取り方によらない超複素多様体の幾何学に帰着させることが出来た(なお、四元数ケーラー多様体の場合には、リーマン接続があるので、このような議論は不要である)。なお、他のパラメータの値の場合に概複素構造が可積分であるための必要十分条件を四元数接続のリッチ曲率で与えてもいる。この特別な値を固定した上で、四元数多様体に  $U(1)$ 作用がある場合に、これを Swann 束に持ち上げこの作用に関して超複素運動量写像を構成し、四元数多様体から同次元の超複素多様体を構成することができた。これを、四元数多様体/超複素多様体-対応と呼ぶ。この四元数多様体/超複素多様体-対応は、既知の四元数ケーラー多様体から超ケーラー多様体を構成する、四元数ケーラー/超ケーラー-対応を一般化したものとなっている。特に、超ケーラー構造を許容しないコンパクトで等質な超複素ホップ多様体に関する例を含むものとなっている。

(2) **超複素/四元数-対応**: まず、ある種の超複素多様体上の  $U(1)$ 束を介して、錘的超複素多様体とよばれる多様体を構成し、この錘的超複素多様体多様体を  $H^1$ の作用で割った空間に四元数構造が入ることを示した。すなわち、超複素多様体から四元数多様体を構成する超複素/四元数-対応を得た。これは既知の超ケーラー/四元数ケーラー-対応を含むものであり、超ケーラー構造を持たない  $SU(3)$ の例を含むものとなっている。

① generalized rigid c-map: 錘的特殊複素多様体とよばれるある種の複素多様体の接束は、

上記の超複素/四元数-対応が適用できることを示した上で、この特殊複素多様体の接束の超複素多様体の小島接続を明示的に求めた(一般に、超複素多様体上には小島接続とよばれる、3つの複素構造を平行にする捩れのない接続が唯一存在する)。それにより、その曲率を求めることができ、特にこの小島接続のリッチ接続は零であることも示した。これは、錘的特殊ケーラー多様体に対して、その余接束が超ケーラー構造を有するという、rigid c-map とよばれている超ケーラー多様体の構成を一般化したことになる。この generalized rigid c-map を用いることで、超複素多様体が構成できる訳であるが、特に小島接続の四元数ワイル曲率を計算することにより、異なる四元数構造を持つような族が定めることも示したが、これは、前述の通り小島接続を明示的に書き下すことで可能となったことを付け加えておく。なお、今後はこの属に超複素/四元数-対応を適用した際に、どのような変化が起こるのかも課題としたい。

② **generalized supergravity c-map** : 錘的特殊複素多様体を  $C$  の作用で割った多様体は射影的特殊複素多様体とよばれる。これは、錘的特殊ケーラー多様体の場合には、ケーラー構造をもち射影的特殊ケーラー多様体とよばれるが、超ケーラー/四元数ケーラー-対応を経由して、射影的特殊ケーラー多様体から四元数ケーラー多様体を構成する手続きであり、supergravity c-map とよばれている。この supergravity c-map は四元数ケーラー多様体の構成法の一つとして、活発に研究されている。本研究課題の枠組みでは、射影的特殊複素多様体には自然に c-射影構造が定まることを証明した。これにより、c-射影構造をもつ複素多様体から四元数多様体を構成する手法を定式化したことになる(これを、generalized supergravity c-map とよぶ)。この c-射影構造の c-射影ワイル曲率も求めた。特に、c-射影ワイル曲率が  $(1,1)$  型であることも分かる。つまり、c-射影ワイル曲率が  $(1,1)$  型でない c-射影構造をもつ複素多様体は射影的特殊複素多様体として実現されないことになり、generalized supergravity c-map を適用することはできないことになる。今後は、複素多様体の射影的特殊複素多様体としても実現可能性についても研究する予定であるが、今回求めた c-射影ワイル曲率の表示が重要であると考えている。さらに、錘的特殊ケーラー多様体に由来しないような例も局所的なものではなるが具体的に得た。generalized supergravity c-map を得る際や、性質を調べるときに部分多様体の幾何学を用いた。当初は研究代表者が以前に得ていた四元数多様体内の曲面に関する幾何学量を高次元化した上で用いることができると想定していた。これらを直接的に用いることは出来なかったが、小島接続の曲率や射影的特殊複素多様体の c-射影構造が部分多様体と関連していることが分かった。これらを含む諸量とより外在的をより強く反映する幾何学量との関連を見出すことは今後の課題としたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 V. Cortes AND K. Hasegawa	4. 巻 76
2. 論文標題 THE H/Q-CORRESPONDENCE AND A GENERALIZATION OF THE SUPERGRAVITY C-MAP	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20221125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 V. Cortes and K.Hasegawa	4. 巻 58
2. 論文標題 The quaternionic/hypercomplex-correspondence	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 213-238
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 6件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 K. Hasegawa
2. 発表標題 The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map
3. 学会等名 Pure and Applied Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 長谷川和志
2. 発表標題 The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 長谷川和志
2. 発表標題 The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 K. Hasegawa
2. 発表標題 The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map
3. 学会等名 第29回複素幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kazuyuki Hasegawa
2. 発表標題 The quaternionic/hypercomplex-correspondence and its converse
3. 学会等名 Special Geometry, Mirror Symmetry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷川和志
2. 発表標題 四元数/超複素-対応
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kazuyuki Hasegawa
2. 発表標題 The quaternionic/hypercomplex-correspondence-
3. 学会等名 The 6th Workshop "Complex geometry and Lie groups" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuyuki Hasegawa and Vicente Cortes
2. 発表標題 A construction of a hypercomplex manifold from a quaternionic manifold-the quaternionic/hypercomplex-correspondence-
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	守屋 克洋  (Moriya Katsuhiro)  (50322011)	筑波大学・数理物質系・助教    (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ドイツ	University of Hamburg		