

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03273

研究課題名（和文）群の作用する非正曲率空間および無限コクセター群と有限グラフの研究

研究課題名（英文）Research on geodesic spaces of non-positive curvature on that groups act, infinite Coxeter groups and finite graphs

研究代表者

保坂 哲也 (Hosaka, Tetsuya)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50344908

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた2つの有限生成な無限コクセター群が群として同型か否かを判定する無限コクセター群の同型問題は未解決な問題である。先行研究を踏まえて、共役な集合に関する条件 (untangle-condition) の下、コクセター系をツイストがないパーツに分解して考えるアプローチにより、一定の成果を得た。

また、有限単純グラフの再構成可能予想はグラフ理論における有名な未解決問題である。本研究では、2種類の矢印を持つ有向グラフを用いるアプローチで研究を行い、一定の研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

無限コクセター群の同型問題は未解決な問題であり、多くの先行研究によって、与えられコクセター系に対して、angle-compatibleなコクセター系がすべて求められるならば、解決するところまで解明されている。コクセター系をパーツに分解して考えるアプローチにより研究を行った。

有限単純グラフの再構成可能予想というグラフ理論の有名な未解決問題に対して、2種類の矢印を持つ有向グラフを対応させ、矢印の終点が見つかる2つのグラフは同型になるアイデアで研究を行った。

研究成果の概要（英文）：For given two finitely generated infinite Coxeter groups, the problem to find an algorithm to determine whether they are isomorphic or not is open. Based on previous research, under the untangle-condition on conjugate subsets, by investigating separations of Coxeter generating sets, we obtain some results.

Also, the Reconstruction Conjecture for finite simple graphs is one of the very famous open problems in Graph Theory. By investigating the associated directed graph with two kinds of arrows, we obtain some results.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学的群論 コクセター群 コクセター群の同型問題 グラフの再構成可能予想 再構成可能グラフ

1. 研究開始当初の背景

(1) 与えられた2つの有限生成な無限コクセター群が群として同型か否かを判定する無限コクセター群の同型問題は重要な未解決問題である。先行研究により、N.Brady-J.P.McCammond-B.Muhlherr-W.D.Neumann (2002) の「ツイスト」に関する研究成果から、Howlett-Muhlherr (2004) および Ratcliffe-Tschantz (2008) と Marquis-Muhlherr (2008) の「コーダル」と "angle-compatible"の研究を経て、Caprace-Przytycki (2010) によるツイストがないコクセター系の rigidity の研究成果とともに、現在、与えられコクセター系に対して、angle-compatible なコクセター系がすべて求められるならば、無限 Coxeter 群の同型問題が解決するところまで解明されている。また、与えられたコクセター系に対して angle-compatible なコクセター系はすべてツイストで求められるのではないかという予想がある。これまでに有限生成な無限コクセター群から同型の差を除いて一意的にコクセター系が定まる十分条件について取り組んだ経験を生かして、特にコクセター系をツイストがないパーツに分解して考えるアプローチから、この予想に取り組むことを考えていた。

(2) また、有限単純グラフの再構成可能予想は Kelly-Ulam 予想ともよばれ、グラフ理論における有名で非常に重要な古くからある問題のひとつである。研究開始当初は有限単純グラフに対し直角コクセター群を対応させるアイデアでこの問題に取り組んでいたが、一方で以前から、2種類の矢印を持つ有向グラフとその cycle を用いるアプローチのアイデアを温めていた。

(3) CAT(0)群の理想境界の位相の rigidity の問題については、Gromov-hyperbolic の場合には成立することがよく知られている。一方で C.Croke-B.Kleiner によって CAT(0)群でその境界が位相的に決定されない例が構成され、更にその境界の位相は非可算無限のバリエーションがあることが J.Wilson によって示されている。これまでの研究の過程で、ある単純な形の CAT(0)群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界の位相は非可算無限のバリエーションを持つのではないかという予想を得た。この予想が正しければ、上述の C.Croke-B.Kleiner および J.Wilson の結果よりも単純かつ本質的な例を得るため、群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界の位相の研究の進展に繋がると考えている。この予想とともに群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の理想境界の位相についての研究に取り組むことを考えていた。

2. 研究の目的

CAT(0)空間(非正曲率空間)とその等長変換群および無限コクセター群と有限単純グラフの研究を主な研究目的としている。

(1) 与えられた2つの無限コクセター群が群として同型か否かを判定する無限コクセター群の同型問題は重要で未解決な問題である。近年、「ツイスト」や「コーダル」という概念が導入され、世界的にコクセター群の同型問題の研究は急速に進んでいる。この問題に取り組み、この世界的な研究の流れに貢献したい。

(2) 有限単純グラフの再構成可能問題は古くからある有名で重要な未解決問題である。コクセター群およびフラッグ複体を用いた独自の手法によりこの問題に取り組むとともに、2種類の矢印を持つ有向グラフとその cycle を用いるアプローチのアイデアにより研究を進める。

(3) ある形の群は幾何学的にある CAT(0)空間に作用するのだが、その理想境界の位相は非可算無限のバリエーションを持つのではないかという予想がある。この予想に取り組み、CAT(0)群の理想境界の位相の研究を進めたい。また、群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の理想境界の位相構造についての研究に取り組む。

3. 研究の方法

(1) 無限コクセター群の同型問題に対して、先行研究を踏まえて、与えられたコクセター系に対して angle-compatible なコクセター系はすべてツイストで求められるのではないかという予想に向けて研究を行った。研究を進める過程で自然に共役な集合に関する条件(untangle-condition)が必要となり、この条件が必ず成立するかは確かめることが困難であったため、これを条件として加えた上で研究を進めた。

コクセター系をツイストがないパーツに分解して考え、2つの angle-compatible なコクセター系に対して、そのように分解した各パーツが対応すれば有限回のツイストを行うことにより共役にできることを目標に研究を進め、結果として、type(I)-type(II)-compatible というアイデアが生まれ、untangle-condition の条件下で、上述の予想が成立することと type(I)-

type(II)-compatible は同値となることが得られた。このことから、共役な集合に関する条件 untangle-condition, および、分割したパーツに関する条件 type(I)-type(II)-compatible の 2 つの条件が angle-compatible なコクセター系に対して常に成立することを示すことができれば、無限コクセター群の同型問題は肯定的に解決できることが得られる。また、もし反例が存在することがわかれば、その例は上述の予想を考える上で重要な知られていない例となる。

(2) 有限単純グラフの再構成可能予想に対して、本研究では、2種類の矢印を持つ有向グラフとその cycle を用いるアプローチで研究を進めた。

2 つの各パーツが同型な有限単純グラフに対して、各パーツの同型写像の情報から 2 種類の矢印を持つ有向グラフを定義した。この有向グラフでは矢印の終点が見つかる、その終点の頂点を除いたグラフの同型写像の拡張として全体の 2 つのグラフの同型が得られる。また、矢印の終点がない場合を考えると、有限グラフであることから、2種類の矢印が交互に現れる cycle が見つかる。このとき、この cycle には α -type と β -type の 2 種類が考えられる。特に α -type の cycle がある場合に、元の 2 つのグラフはどのような構造を持つのかを調べた。また、 α -type および β -type の cycle が現れるグラフの例を与えている。

(3) CAT(0)群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の理想境界について、防衛大の知念直紹氏と共同で研究を行い、特に双曲直角コクセター群の理想境界において Sierpiński carpet および Menger curve という代表的なフラクタル空間が現れる条件について研究を行った。

4. 研究成果

(1) 無限コクセター群の同型問題に対して、数々の重要な先行研究を踏まえて研究を行い、共役な集合に関する条件 untangle-condition の下で、コクセター系をツイストがないパーツに分解して考えるアプローチにより、2 つの angle-compatible なコクセター系が有限回のツイストで共役の差を除いて移りあえることと type(I)-type(II)-compatible という条件が同値であることを示した。

この結果は論文にまとめ、何度かの修正を行い、現在学術誌に投稿中である。

(2) 有限単純グラフの再構成可能予想はグラフ理論における有名な未解決問題である。本研究では、2種類の矢印を持つ有向グラフを用いるアプローチおよび α -type と β -type の 2 種類の cycle を調べることにより研究を行った。この有向グラフにおいて矢印の終点が見つかる、その終点の頂点を除いたグラフの同型写像の拡張として全体の 2 つのグラフの同型が得られることを示した。また、矢印の終点がない場合には 2 種類の矢印が交互に現れる cycle が見つかる。この cycle を α -type と β -type の 2 種類に区別して考察を行い、特に α -type の cycle がある場合に元の 2 つのグラフはどのような構造を持つのかを得た。また、 α -type および β -type の cycle が現れるグラフの例を与えた。今後、この予想に取り組む上で、この有向グラフにおいて矢印の終点がなく、 α -type または β -type の cycle がある場合が重要になる。この結果をまとめた論文は 2022 年 3 月に Discrete Mathematics に受理されている。

(3) 群の理想境界について、防衛大の知念直紹氏と以前から共同で研究を行い、双曲直角コクセター群の理想境界に Sierpiński carpet および Menger curve のフラクタル空間が現れる条件について研究成果を得た。この論文は 2019 年 6 月に Topology and its Applications に掲載されている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Chinen Naotsugu, Hosaka Tetsuya	4. 巻 260
2. 論文標題 Hyperbolic right-angled Coxeter groups with boundaries as a Sierpinski carpet and a Menger curve	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 70 ~ 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.03.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hosaka Tetsuya	4. 巻 345
2. 論文標題 The reconstruction conjecture for finite simple graphs and associated directed graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2022.112893	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------