

令和 3 年 4 月 12 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03275

研究課題名(和文)力学系の平均次元の研究

研究課題名(英文) Study of mean dimension of dynamical systems

研究代表者

塚本 真輝 (Tsukamoto, Masaki)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：70527879

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：この研究計画は「平均次元」という量を研究している。時系列データの集まりを「力学系」という。このデータが単位時間あたりに持つ自由度の数を平均次元と呼ぶ。今回の研究計画の最大の成果は「平均次元に対する二重変分原理」の発見であった。極小と呼ばれる力学系に対して、その平均次元を「レート歪み次元」という情報理論の量のミニマックスで表すという定理である。これは力学系理論と情報理論とのまったく新しいつながりを発見したものである。またこの研究計画では、他にも平均次元に関する色々な成果を挙げている。中でも、「周期点を持たない力学系はマーカ-性質を持つか？」という未解決問題を解決したことは大きかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系の研究では、伝統的に情報理論との関連が重要視されており、例えば力学系のエントロピーの理論では、「位相的エントロピー」という量を「測度論的エントロピー」という情報理論的量を用いて表す「変分原理」が有名である。類似の理論を「平均次元」に対してつくることは、平均次元が20年前に定義されて以来自然な問題だったが、これまで進展がなかった。今回、それをついに成し遂げることができた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this project is to study mean dimension. Mean dimension is the number of degrees of freedom per unit time for describing dynamical systems. We found the "double variational principle for mean dimension". Given a minimal dynamical system, we proved that its mean dimension is equal to the minimax value of the rate distortion dimension (the quantity in information theory). This discovery opens a very new interaction between dynamical systems theory and information theory.

We also found several interesting things around mean dimension. In particular, we solved a problem about "marker property", which asks whether there is a free dynamical system violating the marker property.

研究分野：数学

キーワード：力学系 エルゴード理論 平均次元 レート歪み理論

## 1. 研究開始当初の背景

時系列データの集まりを「力学系」と呼ぶ。例えば、「周波数がある帯域に制限されたシグナル全体」は力学系である。力学系が単位時間あたりに持つ自由度を「平均次元」と呼ぶ。これはグロモフという数学者が1999年の論文で導入したものである。この量の理論を深め、さらに具体例を深く解析することをこの研究計画は、目指した。

## 2. 研究の目的

平均次元の一般論の研究としては、「信号処理」や「情報理論」の手法を用いて、平均次元に関するいくつかの根本的な構造定理を示すことを目指した。具体的には、「力学系の埋め込み問題」と呼ばれるものに関するリンデンシュトラウスと私の予想を解決することや、レート歪み理論と平均次元との関連をさらに発展させることなどを目指した。具体例の研究では、複素幾何や幾何解析から現れる無限次元力学系の平均次元を研究することを目指した。

## 3. 研究の方法

情報理論と平均次元との間の関連を発展させるために、幾何学的測度論の「力学系版」をつくることが有用であることを発見し、それに取り組んだ。また、「力学系の埋め込み問題」の研究で有名であった「マーカー性質」と呼ばれる条件に関する問題に、代数トポロジーの手法が有用だと気づき、それを用いて研究した。平均次元の一般論に関する研究が非常に大きく発展したため、具体例の方の研究は論文が書ける段階までには進展しなかったが、一般論のほうの進展を踏まえて、さまざまな考察は進んでいる。

## 4. 研究成果

まず平均次元と情報理論との関連についての成果を述べる。力学系理論では従来から情報理論との関連は重要視されており、特にエントロピーの理論において、「位相的エントロピー」という力学系の位相不変量を「測度論的エントロピー」という情報理論的量で表す「変分原理」は非常に有名だった。これの「平均次元版」を見つけることは自然な問題だが、これまであまり進展がなかった。

私は、極小という条件を満たす力学系に対して、その平均次元が「レート歪み次元」という量のミニマックスで表せるという定理を証明した。「レート歪み次元」というのは、「レート歪み理論」と呼ばれる情報圧縮の理論で研究されていたものである。この定理は、力学系の理論と情報理論とのまったく新しいつながりを見つけたものである。ミニマックスを考えるとという点を強調するために「二重変分原理」と呼ぶことにした。

この成果は、幾何・解析関連のトップの学術誌の一つである *Geometric and Functional Analysis* に掲載されている。

上記の成果は素晴らしいものだったと思うが、幾何解析や複素幾何から現れる無限次元力学系に「二重変分原理」を適用しようとする、まだ理論が十分ではないことに気づく。このような具体例を解析する際には、力学系の上に特に重要な役割を果たす特別な関数が与えられていることが多く、この関数の持つ情報を理論に取り込む必要がある。

そこで力学系の上に関数が与えられたとき、その関数をポテンシャルとする「ポテンシャル付き平均次元」という量を導入した。そして、極小力学系に対して、そのポテンシャル付き平均次元をレート歪み次元とポテンシャル関数の積分との和に結びつける二重変分原理を証明した。これは、力学系理論においてよく知られている「位相的圧力の理論」の平均次元版になっている。この成果は一流の学術誌である *Advances in Mathematics* に掲載された。この成果を実際に、幾何解析・複素幾何の状況に適用することは次の大きなテーマである。今回の研究期間内では、論文が書ける段階にはまだ至らなかったが、考察は着々と進めている。

「二重変分原理」を証明するための技術的なカギは、「幾何学的測度論」の「力学系版」をつくるというアイデアである。特に、「平均ハウスドルフ次元」という量を導入し、その基本的な性質を調べることが重要であった。ここから自然に派生する問題として、ハウスドルフ次元に関連する幾何学的測度論の様々な研究の「力学系版」を考えるというテーマが生じる。これはかなり

大きな新しい研究テーマ(あるいは,新しい研究分野とすらいえるかも知れない)であるが,その具体例として,記号力学系のハウスドルフ次元に関する古典的な定理(フルステンベルグが1960年代に示した)の「平均ハウスドルフ次元版」を証明した.この成果は Ergodic Theory and Dynamical Systems 誌に掲載されている.

幾何学的測度論の力学系版を研究するというアイデアは非常に生産的だと期待できる.今後もこの方向でさらに成果がでるだろうと思っている.

次に「力学系の埋め込み問題」についての研究を述べる.残念ながら,この問題に関するリンデンシュトラウスと私の予想を解決するには至らなかった.一方で,この問題に深く関連する別の重要な問題を解決することができた.それは「マーカー性質」と呼ばれるものに関する研究である.力学系の埋め込み問題では,従来,「マーカー性質」という条件を仮定して議論することが多かった.したがって,この条件が意味するものをよりよく理解すれば,埋め込み問題の理解の進展にもつなげることが期待できる.

マーカー性質を持つ力学系は「自由」(周期点を持たない)であることがすぐにわかる.そこで逆に「自由な力学系は必ずマーカー性質を持つか?」という問題が生じる.この問題は2015年出版の Yonatan Gutman 氏の論文で述べられており,またそのオリジンは Elon Lindenstrauss 氏の博士論文にまで遡るものである.

上記の問題が難しいのは,これが本質的に「無限次元」の問題だからであった.(有限次元力学系に対しては,自由ならマーカー性質を持つことがすでに知られていた.)この問題を解決するために私は,「 $p$  指数の理論」という代数的位相幾何学の理論を力学系に適用するという全く新しい手法を開発した.これによって無限次元力学系を解析するための全く新しい手法が手に入り,問題を解決することができた.答えは「自由だが,マーカー性質を持たない力学系が存在する」であった.

この成果は,単に未解決問題を解決したというだけにとどまらず,本質的に新しい手法を導入したという点で非常に大きなものだったと考える.この結果を記した論文は現在,学術誌に投稿中である.

マーカー性質に関する問題の解決を踏まえて,改めて「力学系の埋め込み問題」について考察を続けている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mao Shinoda, Masaki Tsukamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Symbolic dynamics in mean dimension theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/etds.2020.47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Elon Lindenstrauss, Masaki Tsukamoto	4. 巻 29
2. 論文標題 Double variational principle for mean dimension	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1048-1109
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00039-019-00501-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masaki Tsukamoto	4. 巻 361
2. 論文標題 Double variational principle for mean dimension with potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 106935
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2019.106935	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 塚本真輝	
2. 発表標題 フルシフトの平均次元と関連する諸問題	
3. 学会等名 一般位相幾何学とその関連分野の発展（招待講演）	
4. 発表年 2020年	

1. 発表者名 塚本真輝
2. 発表標題 平均次元入門
3. 学会等名 日本数学会年会 総合講演（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 塚本真輝
2. 発表標題 力学系の平均次元と情報理論
3. 学会等名 日本数学会 幾何学賞受賞特別講演（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 塚本真輝
2. 発表標題 平均次元に対する二重変分原理
3. 学会等名 幾何学シンポジウム 基調講演（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	Polish Academy of Sciences			
イスラエル	Hebrew University			
イスラエル	Hebrew University			