

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03278

研究課題名(和文) 同変枠付写像の擬逆極限系による多様体上の群作用の研究

研究課題名(英文) Study of group actions on manifolds by pseudo-inverse limit systems of equivariant framed maps

研究代表者

森本 雅治 (MORIMOTO, Masaharu)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：30166441

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：Gは有限群とする。G-写像  $f: X \rightarrow Y$  と恒等写像  $id: Y \rightarrow Y$  の間の枠付き M-同境  $F, M: W, M \rightarrow I \times Y$  ( $I=[0,1]$ )，ここでMはGの部分群のなすある集合Aを渡る，のなす擬逆極限系を考える。うまく擬極限系を選び，うまく同変手術を行えば，多様体Yの上のG-作用を新たに発見できる。これを研究し，球面Sが(その上のG-作用で)不動点が唯1点であるG-作用を持つためのSの次元に関する必要十分条件を(作用がB-自由という条件の下(BはGのAに属さない部分群の集合))で次の群において決定できた：G = 交代群  $A_5, A_6$ , 対称群  $S_5$ , 線形群  $SL(2, 5)$  等。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限群Gが多様体X, Yに作用している状況で，G-写像  $f: X \rightarrow Y$  を同変手術により微分同相写像にホモトピックな  $f': X' \rightarrow Y$  に変形する問題は難しい問題である。特に，ある部分群Hに対しXのH-不動点集合の次元が3, 4となる場合には極めて難しい問題である。本課題研究ではfと恒等写像idの間の枠付きM-コボルディズム  $F, M: W, M \rightarrow I \times Y$  (MをA上で動かす)の擬逆極限系をうまく選んでこの困難さを克服する研究を行い，うまく選択方法を得ることができた。ここに学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：Let G be a finite group, A a set of subgroups of G, and B the set of subgroups not belonging to A. We say that a G-action on Z is B-free if the L-fixed-point set of Z coincides with the G-fixed-point set of Z. We consider pseudo-inverse-limit systems  $F, M: W, M \rightarrow I \times Y$ , where M runs over A, between a G-map  $f: X \rightarrow Y$  and  $id: Y \rightarrow Y$ . Choosing a suitable pseudo-inverse-limit system and performing G-surgeries, we would discover new G-actions on the underlying manifold of Y. Studying this problem, we could determine the dimension of spheres S with B-free G-action such that S has exactly one G-fixed point for groups: Alternating Groups  $A_5, A_6$  (degree 5, 6), Symmetric Group  $S_5$  (degree 5), Double Covering Groups  $SL(2, 5)$  of  $A_5$  and  $TL(2, 5)$  of  $S_5$ , and etc.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：多様体上の群作用 枠付き同変写像 同変手術 球面上の群作用

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

1970–75 年ごろ Browder や Rothenberg などが isovariant な手術理論を研究し、1975–85 年において T. Petrie, K.H. Dovermann, Lück–Madsen などが不動点集合の次元が strong gap 条件を満たす場合に同変手術理論を構築した。この同変手術理論を用いて、Petrie とその共同研究者たちは、線形作用と  $G$ -コボルダントでない様々な球面上の作用を作り、Smith 同値であるが同型ではない実表現の組の例を統一的手法により数多く得るなど、微分トポロジーにおける変換群論の研究を大きく進展させた。これらの研究を引き継ぎ、森本は 1980 年代後半から gap 条件の下で同変手術理論を、1990 年代に Bak と共に weak gap 条件の下で同変手術理論を構築した。また森本は A. Bak, X.M. Ju, 松崎勝彦と共に同変手術障害類群の Dress 型誘導理論を展開した。これらの理論を総合的に用い、Bak–森本, Laitinen–森本は次の結果 (A1)–(A3) を得た。

- (A1) 5 次の交代群  $A_5$  と自然数  $n \geq 6$  に対して、 $n$ -次元球面  $S^n$  は不動点を唯 1 点のみとする群  $A_5$  の作用を持つ。
- (A2) ある有限群が  $n$ -次元球面  $S^n$  に唯ひとつの不動点を持って作用するならば  $n \geq 6$  である。
- (A3) 有限群  $G$  がある次元の球面に唯ひとつの不動点を持って作用することができる  $\iff G$  は mod- $p$  hyper-elementary ではない。

一方、R. Oliver は 1970 年代半ばから 1990 年代半ばにかけて有限群論、 $K$ -理論、同変ホモトピー論を用いてディスク上の作用の不動点集合を決定するという偉業を成し遂げた。1990 年代後半から同変手術理論と Oliver の理論を応用し、Laitinen, Pawalowski, Solomon, X.M. Ju, 角, 森本などが Smith 同値な表現対の定める Smith 集合 ( $\subset \text{RO}(G)$ ) について多くの研究成果をあげた。これ以外にも、同変手術理論と (表現論や  $L$ -理論を含む)  $K$ -理論により、有限群の多様体上の作用の研究において多様な成果を得られた。また 2016–19 年において、森本–杉村は線形  $G$ -作用を持つ球面上の自己  $G$ -写像の研究を目的に、Burnside 環  $\Omega(G)$  と逆極限  $\lim_{\leftarrow \mathcal{H}} \Omega(H)$  の関係を研究した。上記のトピックスに関連し、次の成果が得られていた。

- (A4) M. Kaluba (2016) :  $G$  のディスク上の作用の不動点集合として得られる閉多様の全体を  $\mathfrak{F}(G)$  とする。  $G = A_5$  (5-次交代群) ,  $F \in \mathfrak{F}(G)$  ,  $\dim F \equiv 0 \pmod{2} \implies F$  は (ある次元の) 複素射影空間上の作用の不動点集合になる。
- (A5) A. Borowiecka (2016) :  $G = \text{SL}(2, 5)$  (特殊線形群で  $A_5$  の 2 重被覆群) は 8-次元球面  $S^8$  に唯ひとつの不動点を持って作用することはできない。(注: 9-次元球面  $S^9$  の場合も同様の結果を証明できる。)
- (A6) 田村俊輔 (2017) :  $G = S_5$  (5-次対称群) は  $S^n$  ,  $n = 7, 8, 9, 13$  , に唯ひとつの不動点を持って作用することはできない。

Kaluba による (A4) の証明方法は  $A_5$  を  $A_6$  (6-次交代群) や  $S_5$  (5-次対称群) に取り替えると (僅かな複雑化であるにも関わらず) 機能しない. このため, 研究開始時点では, (A4), (A5), (A6) の一般化が可能な理論開発が求められていた.

## 2. 研究の目的

$G$  は有限群,  $\mathcal{S}(G)$  は  $G$  の部分群の全体,  $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{S}(G)$  の ( $H \in \mathcal{M}$  ならば  $\mathcal{S}(H) \subset \mathcal{M}$  を満たす) ある真部分集合,  $\mathcal{L} = \mathcal{S}(G) \setminus \mathcal{M}$  とする. 枠付き  $G$ -写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して  $f$  を  $G$ -手術して

(P1)  $f'$  は微分同相写像にホモトピック, かつ

(P2) すべての  $L \in \mathcal{L}$  に対し  $X'^L = X^L$  である

を満たす枠付き  $G$ -写像  $f': X' \rightarrow Y$  を得ることができるそのような  $f$  の十分条件を得るのが研究の目標である.

本来代数的な同変手術障害類 (あるいは障害類群) の研究は困難であるが, ある部分群  $H$  に対し  $\dim X^H = 3, 4$  となるケースには, 低次元の多様体には代数的な同変手術障害類が得られていないため, 問題は一層困難である. そこで枠付き同変コボルディズムのなす擬逆極限系  $\{F_M: W_M \rightarrow I \times Y \mid M \in \mathcal{M}\}$  を考え,  $(f, \{F_M\})$  に上記の困難を乗り越えることができる「適切な付加条件を求める」ことを本研究の抽象的目的とする. また次の予想を統一的手法により肯定的に解決することを本研究の具体的目的とする.

(C1)  $n \geq 5$ ,  $G = A_n$  ( $n$ -次交代群),  $S_n$  ( $n$ -次対称群),  $F \in \mathfrak{F}(G) \implies F$  は (ある次元の) 実射影空間上の作用の不動点集合になる.

(C2)  $G = \mathrm{SL}(2, 5)$  は  $S^n$  に唯ひとつの不動点を持って効果的に作用する  $\iff n = 7$  or  $n \geq 10$ .

(C3)  $G = S_5$  は  $S^n$  に唯ひとつの不動点を持って効果的に作用する  $\iff n = 6, 10, 11, 12$  or  $n \geq 14$ .

## 3. 研究の方法

$\Omega(G)$  は  $G$  の Burnside 環,  $\omega_G^*(Y)$  は  $Y$  の同変一般コホモロジー理論とする.  $G$  が次のような  $\beta \in \Omega(G)$  を持つ場合を考える:  $\chi_L(\beta) = 0$  ( $\forall L \in \mathcal{L}$ ) かつ  $\chi_M(\beta) = 1$  ( $\forall M \in \mathcal{M}$ ). ここで  $\chi_L: \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$  は, 有限  $G$ -複体  $Z$  に対して, その  $L$ -不動点集合  $Z^L$  の Euler 標数  $\chi(Z^L)$  を対応させる準同型写像である. 好ましい  $(f, \{F_M\})$  の構成は,  $\omega_G^*(Y)$  と  $\omega_M^*(Y)$ ,  $M \in \max(\mathcal{M})$ , の  $\alpha = [G/G] - \beta$  と  $\mathrm{res}_M^G \alpha$ ,  $M \in \max(\mathcal{M})$ , による局所化と  $\omega_G(\{x_0\})$  が  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathrm{Map}_0^G(S(\mathbb{C}^m), S(\mathbb{C}^m))$  に同型であることを利用して行う.

次に,  $G$  を具体的な群 (例えば  $\mathrm{SL}(2, 5)$ ,  $S_5$  など) とし,  $G$  の部分群のなす Hasse 樹形図を描く. その樹形図に, 各部分群の  $G$  における正規化群  $N_G(H)$  の情報と  $\dim Y^H$  の情報を付加した手術データ樹形図を作成する. 次に Hasse 樹形図の枝先 (位数の大きなもの) から根元 (単位群) に向かって, 帰納的に, 各部分群での  $(f, \{F_M\})$  の同変手術が求める  $f'$  に向かうようにできることを,

- 手術データ樹形図,
- $\beta$  の性質,

- 同変手術障害類群の Dress 型誘導理論,
- 同変球面の連結和

を利用して示す.

#### 4. 研究成果

$G$  は非可解有限群とし,  $\mathcal{M}$  は  $G$  の可解部分群の全体とする. さらに  $V$  は  $V^L = 0 (\forall L \in \mathcal{L})$  を満たす実  $G$ -表現空間とし,  $Y$  を  $V$  の単位球面  $S(V)$  とする. この場合に  $\mathcal{M}$  の部分集合列  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{M}$  (ただし,  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}' \subset \min(\mathcal{F})$  を満たすとする) で「ある条件を満たす」ものがあれば, 上に述べた  $(f, \{F_M\})$  から  $f'$  が得られるという十分条件を見出した. この十分条件は複雑であるため, ここでは割愛する. この十分条件を用いて上に述べた (C2), (C3) を肯定的に解決し, さらに次の結果を得た.

(C4)  $G = A_5 \times Z_2$  ( $|Z_2| = 2$ ) は  $S^n$  に唯一ひとつの不動点を持って効果的に作用する  $\iff n \geq 6, 7, 8, \text{ or } n \geq 10$ .

(C5)  $G = A_5 \times Z_r$  ( $Z_r$  は 30 と素な位数の巡回群) は  $S^n$  に唯一ひとつの不動点を持って効果的に作用する  $\iff n = 9 \text{ or } n \geq 11$ .  $G$  は  $S^n$  に唯一ひとつの不動点を持って効果的に作用する

(C6)  $G = \text{TL}(2, 5)$  は  $S^n$  に唯一ひとつの不動点を持って効果的に作用する  $\iff n = 14, 18, 19, 20, \text{ or } n \geq 22$ . ここで  $\text{TL}(2, 5)$  は  $\text{SL}(2, 5)$  を正規部分群に持ち, かつ  $S_5$  の非自明な 2 重被覆群である.

今後の研究課題:  $f: X \rightarrow Y$  は枠付き  $G$ -写像とする.  $\mathcal{M}$  内のある部分群列  $H < K$  に対して,  $\dim X^H = 2k + 1 \geq 5$  かつ  $\dim X^K = k + 1$  が成り立つケースでの  $f$  の isotropy type ( $H$ ) の代数的  $G$ -手術障害類が得られていない (つまり weak gap 条件が成り立たない場合の同変手術理論は知られていない). この場合の同変手術理論が構築されれば, 多様体上のエキゾチックな  $G$ -作用を数多く見出すことができる. 例えば,  $G = A_6$  に対して,  $G$ -不動点を唯一ひとつ持つ  $G$ -作用を有する球面の次元を決定するには, この新たな同変手術理論の開発が不可欠であると考え.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Masaharu Morimoto	4. 巻 vol.60, no.3
2. 論文標題 Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups I	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Morimoto	4. 巻 vol.60, no.2
2. 論文標題 Appendix to P. Mizerka's Theorem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 377--383
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Morimoto, Shunsuke Tamura	4. 巻 57
2. 論文標題 Spheres not admitting smooth odd-fixed-point actions of $S_5$ and $SL(2, 5)$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1--8
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/73733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Morimoto	4. 巻 2098
2. 論文標題 Smooth odd fixed point actions on $Z_2$ -homology spheres, Geometry, Algebra and Combinatorics in Transformation group theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 15--20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro HARA, Masaharu MORIMOTO	4. 巻 47
2. 論文標題 The inverse limit of the Burnside ring for a family of subgroups of a finite group	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 427--444
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1529308826	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 森本 雅治
2. 発表標題 Review of Reflection Method of G-Framed Maps
3. 学会等名 第48回変換群論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本 雅治
2. 発表標題 One-fixed-point actions on spheres of extensions of $A_5$ and $S_5$
3. 学会等名 代数的位相幾何学の軌跡と展望 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Equivariant surgery and dimension conditions
3. 学会等名 Conference celebrating the 70th birthday of Prof. Krzysztof Pawalowski (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 One-fixed-point 3-pseudofree effective actions on spheres
3. 学会等名 Transformation Group Theory: The path we have walked along, and the way to progress (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Construction of exotic actions on spheres of finite groups
3. 学会等名 The 46th Symposium on Transformation Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Lecture on One-Fixed-Point Actions of $S_5$ on $S^n$
3. 学会等名 Group Action Forum Workshop, Poznan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Equivariant surgery theory revisited
3. 学会等名 変換群論研究集会 (大阪大学) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Remarks on smooth actions on spheres
3. 学会等名 Joint Meeting of UMI-SIMAI-PTM (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Translation of the induction theory of Mackey functors into Algebraic-Differential Topology
3. 学会等名 The 16th Symposium on Algebraic Curves (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu, SEITA Kohei
2. 発表標題 On G-actions with finite fixed points on spheres
3. 学会等名 The 45th Symposium on Transformation Groups (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 MORIMOTO Masaharu
2. 発表標題 Smooth odd fixed point actions on $Z_2$ -homology spheres
3. 学会等名 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	早坂 太  (HAYASAKA Futoshi)  (20409460)	岡山大学・環境生命科学学域・准教授    (15301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ポーランド	Adam Mickiewicz University		