様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　５月３０日現在

機関番号：１７１０２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：１８K０３２８２

研究課題名（和文）べき零拡大に対する素閉測地線の密度定理と熱核の漸近挙動

研究課題名（英文）Density Theorems of Closed Geodesics for Nilpotent Extensions and Asymptotics of Heat Kernels

研究代表者

勝田　篤（KATSUDA, ATSUSHI）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：６０１８３７７９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：物性物理学の基本的なツールであるFloquet-Bloch理論は離散abel群に関するものであるが，今回それを離散Heisenberg群に対して拡張し，その応用として，被覆空間上の熱核の長時間漸近挙動の精密化および，負曲率多様体の素閉測地線の分布に関するDirichletの算術級数定理およびChebotarevの密度定理の幾何学的類似に関し，Heisenberg版の結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Floquet-Bloch理論は通常無限アーベル群の対称性を持つ物質におけるシュレディンガー作用のスペクトルの構造の解析に用いられるもので，バンド理論とも呼ばれ，物性物理での基本ツールである．これまでその非可換拡張は非可換離散群は非I型と呼ばれるクラスに属するため，確立されていなかった．今回最も単純な場合ではあるが，最も基本的なHeisenberg群に対して確立したことは，新たな方向への第一歩となると考えている．

研究成果の概要（英文）：Floquet-Bloch theory is a fundamental tools of solid state physics. We have established its generalization to Heisenberg group. As its applications, we proved long time asymptotic formula of heat kernels on covering spaces and geometric analogue of the Chebotarev density theorem for Heisenberg extensions.

研究分野：幾何学

キーワード：Floquet-Bloch　Asymptotic formulas　Heisenberg　heat kernel　closed geodesic

１．研究開始当初の背景

コンパクト負曲率多様体の素閉測地線の長さに対し，Selberg, Margulis, Parry, Pollicott らにより，次のような閉軌道の長さの分布が素数分布における素数定理の幾何学的類似（素閉測地線定理）が成立している．この分布のより詳しい様子，Dirichlet の算術級数定理および Chebotarev の密度定理の幾何学的類似については，有限拡大の場合は数論での議論を組み合わせて，Parry-Pollicott，足立-砂田の結果が知られていた．次に考えるべき無限アーベル拡大の場合は数論でのアナロジーは存在しないが，幾何学的にはホモロジー群として自然な設定であり，申請者と砂田との共同研究および他のグループの研究者による結果がいくつか得られていた．この手法はその後コンパクト多様体およびその離散版である有限グラフの無限アーベル被覆空間上の熱核の長時間漸近挙動の研究とも結びつき，それらについても類似の結果が得られていた．
一方，べき零被覆グラフ上の熱核の漸近挙動に関しては関数解析手法によりある程度の結果が得られていたが上記の結果に比較すると，前者の方が精密性に関し優位な状況であった．

２．研究の目的

　べき零被覆空間上の熱核の長時間漸近挙動の精密化および，負曲率多様体の素閉測地線の分布に関する Dirichlet の算術級数定理および Chebotarev の密度定理の幾何学的類似のベキ零被覆版の結果を得ることおよびその基礎となる Floquet-Bloch 理論を非可換化することである．

３．研究の方法

Floquet-Bloch 理論を非可換化することが第一目標であるが，離散べき零群の表現論は非Ｉ型であるため一筋縄ではいかない，離散群の有限次元表現とそれらを格子として持つリー群のユニタリ表現をうまく関係づけることにより，目的を達成する．

４．研究成果

始めに，無限 Abel 群における方法を振り返り，またその適用限界について説明する．

（１）(幾何学的設定)無限アーベル拡大に関する結果の基本アイデアを負定曲率 Riemann 面の場合に，Selberg 跡公式を用いて説明する．これは数論的手法の幾何学的翻訳であり，この公式は無限アーベル群の既約ユニタリ表現（指標）で捻られた作用素（捻りラプラシアン）の trace を2通り計算することにより得られ，おおよそ次の形であらわされる．

スペクトル側(Spectral side)＝幾何学側(Geometric side)

左辺は捻りラプラシアンの固有値の重み付き和であり，右辺は閉測地線の長さと指標が組み合わされた和である．この式は有限次行列で成立する式である「固有値の和＝対角成分の和」の一般化といえる．

（２）(従来の数論の手法)幾何学側に関しては，指標（既約表現）の直交性を用いて，既約表現(同値類)全体にわたる和をうまくとると必要なホモロジー類の情報が選び出せる．一方，スペクトル側については拡大群が有限群の場合は，自明表現が孤立しており，漸近挙動の主要部には自明表現での捻りラプラシアン，すなわち，捻りのない通常のラプラシアンの固有値のみが寄与することを見ることで，所望の結果を得る．数論ではＬ関数を用いて同様の議論をするがこの部分のアイデアは Dirichlet までさかのぼる．

（３）(無限 Abel 群における方法)幾何学側に関しては，和を積分で置き換えればよく，上の項目と本質的には変わらない．一方，スペクトル側については，自明表現は孤立していないので，新たに漸近挙動の主要部の解析に，自明表現の近傍における捻じれラプラシアンの固有値の摂動解析を用いるという議論で結果を得る．

（４）(適用限界)無限アーベル群の議論はフーリエ変換の理論と言えるがこれを表現論の用語を用いてのべると，その基礎にあるのは右正則表現の既約ユニタリ表現による(直積分)分解である．無限 Abel 群の場合は既約ユニタリ表現は１次元表現(指標)であった．この部分は物性物理では Bloch 解析と呼ばれ，基本ツールの一つである．無限離散アーベル群のフーリエ逆変換公式とも解釈できる．他方，非 Abel 群の場合後述のような難点があり，本質的進展はほとんどなかった．

（核心をなす学術的「問い」，その困難性と離散 Heisenberg 群での成果の反響）
学術的「問い」を標語的に表現すれば「非可換 Bloch 解析の探求」である．この名を称する既存

研究も複数あるがいずれも限定的で「Bloch 解析」の真の意味で非可換化とは言い難い(以下の Kuchment のコメント参照).
まず困難性であるが，非可換群のユニタリ表現論は，リー群の場合と離散群の場合とでは劇的に困難さが異なる．リー群の場合，多くはＩ型という扱い易いものであるが無限離散群の場合，アーベル群の有限拡大以外は非Ｉ型であり，抽象的分解定理は存在するものの計算不能で，またユニタリ双対(既約ユニタリ表現の同値類の集合)も野性的空間であり，完全解明は人類には(原理に)不可能という意見もあるほど困難である.
Bull.~AMS に周期的微分作用素の Survey を書いた Kuchment も非アーベル群の場合は最も簡単と思われる離散 Heisenberg 群に対しても Bloch 解析はできていないとコメントしていた．前課題の成果である以下の Preprint を彼に送ったところ，直ちに強い関心があるとの返信があった．さらに彼以外の多くの専門家からも好意的な反応があった．(A.Katsuda, An extension of the Bloch-Floquet theory to the Heisenberg group and its applications to geometric Chebotarev density theorems and long time asymptotics of the heat kernels)

（本研究の目的および学術的独自性と創造性）
本課題で主に考察した離散 Heisenberg 群における困難の克服法及び副産物について説明をする.

（５）(表現論的側面)アーベル群の場合の様に正則表現の既約分解を考えたいのであるが 上述の困難により，離散 Heisenberg 群の既約ユニタリ表現すべて考えてもうまくいかない．\text ただし，有限次元既約ユニタリ表現に限れば，それらは分類可能で，正則表現のそれらのみで分解される(Pytlik の定理)．一見，有限次元表現でできるならば，上記の困難は大したことはないと考えるかもしれないが，しかし，一方で，有限次元表現は，表現空間もまちまちであり，そのため摂動解析がそのままではうまくいかない．そこでそれらを Heisenberg-Lie 群の無限次元既約ユニタリ表現で，共通の表現空間を持つ Schrodinger 表現の族(この族は 0 でない実数でパラメータ付けされている)と結び付けた.
特にこのパラメータが有理数である場合，この表現を離散部分群に制限すると既約ではなく，有限次元既約ユニタリ表現の直積分に分解する．その結果を被積分因子の fluctuation が近似誤差であるという解析的評価ではなく表現論による方法で近似定理とみなした．これには(コロンブスの卵的)新規性はあると考える.

（６）(スペクトル的側面)Schrodinger 表現を用いた形式的摂動計算を行う．これには表現空間が共通という利点があり，そのためアーベル拡大の場合に用いた方法が「精神」としては適用できるが，無限次元性による技術的複雑さもある(例えば反復積分を利用する必要があるが，それはこの部分で用いられる)．また無限次元であるがゆえ「発散の問題」が生じるが形式計算の正当化は有限次元に帰着させることにより保証される．すなわち有限次元と無限次元は互いに相補的である.

（７）上記の(５),(６) の議論は従来 Helffer, Sjostrand により，半古典解析の議論を用いてなされていた Harper 作用素のスペクトル漸近公式（Wilkinson 公式）の数学的正当化の別証明を与える．この作用素は平面上の定磁場付きラプラシアンの離散版であり，そのスペクトルは Hofstadter butterfly とよばれ，フラクタル状の形状をなすことが知られている.
議論の骨子は形式的テーラー展開を行えば，Wilkinson 公式は定式的には得られるが，その元々は有界作用素であるにも関わらず，展開の第２項には非有界作用素である調和振動子が現れ，そのままでは数学的には意味をなさないのでなんらかの正当化が必要であった.
従来の方法はある種の局所化によるもので，その手法は他のいくつかの場面にも応用できる興味深いものではあるが，微分作用素と掛け算作用素を組として扱う必要があった．　我々の方法は上記（５）の考え方（直積分の分解公式を近似定理とみなすということ）に基づくものであり，その一つの利点として，微分作用素と掛け算作用素をそれぞれ別々に扱って正当化できることであり，それゆえ他のいくつかの漸近展開に関する予想への応用可能性が生じた.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 勝田　篤	４．巻 2201
２．論文標題 An extension of the Bloch-Floquet theory to the Heisenberg group and its applications to asymptotic problems for heat kernels and prime closed geodesics	５．発行年 2022年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 59－75
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Katsuda, Atsushi; Nakamura, Takuya	４．巻 149
２．論文標題 A rigidity theorem for Killing vector fields on compact manifolds with almost nonpositive Ricci curvature	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	６．最初と最後の頁 1215-1224
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14742	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 勝田　篤
２．発表標題 Nash の埋め込み定理の原証明とその応用可能性
３．学会等名 研究集会「測地線及び関連する諸問題」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 勝田　篤
２．発表標題 Riemann の教授資格取得講演と現代のリーマン幾何学
３．学会等名 研究会「直観幾何学 2022」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 勝田　篤
２．発表標題 素数と素閉測地線ーDirichlet,Riemann,Selbergー
３．学会等名 研究会「直観幾何学 2022」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 勝田　篤
２．発表標題 Closed geodesics and heat kernels for Heisenberg extensions
３．学会等名 研究集会「 多様体上の微分方程式 」金沢シリーズ第18回（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 勝田　篤
２．発表標題 閉測地線，熱核，ハイゼンベルグ群
３．学会等名 研究集会「測地線及び関連する諸問題」（招待講演）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関