様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２８５

研究課題名（和文）コンパクトケーラー多様体の標準系の研究

研究課題名（英文）Pluricanonical systems of compact Kahler manifolds

研究代表者
辻　元（TSUJI, Hajime）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：３０１７２０００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：コンパクト・ケーラー多様体の滑らかなケーラー族について、そのファイバーの標準系と全空間の相対標準系を関連付ける道筋を確立しました。具体的には各ファイバーの上のケーラーリッチ流が、そのファイバーを除いた空間のケーラーリッチ流の「留数」として得られることを示しました。これにより全空間のケーラーリッチ流の生じる特異性が自然に各ファイバー上のケーラー・リッチ流の特異性に「遺伝」することが示されました。これは各ファイバー上のケーラー錐、有効錐(psudoeffective cone)が底空間のパラメーターに連続的に依存していることを示しています。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ケーラー・リッチ流の底空間のパラメーターに関する連続性は、コンパクト・ケーラー多様体のケーラー族についてファイバーの多重種数が底空間のパラメータ不変であるという予想の協力な傍証です。この研究はコンパクト・ケーラー多様体のケーラー族のモジュライ理論において基本的なものであり、コンパクト・ケーラー多様体において、その上のの直線束が乏しいという問題点を乗り越えるための基本的な道具としてケーラー・リッチ流が考えられることを示しています。

研究成果の概要（英文）：In algebraic geometry, minimal model with scaling is a couter object of the Kaher-Ricci flow in Kahle geometry, i.e., addogng the ample divisor corresponds to the initial Kahle form. In algebraic geometry, it is known that the minimal model program with scaling is (in asense) continuous for a smooth projective family. For a smooth Kahler family of compact Kahler manifolds, I related the Kahler-Ricci flow of a fiber and the Kahler-Ricci flow of the complement of the fiber. More precisely, we can show that the residue of the Kahler-Ricci flow of the complement coincides the Kahler-Ricci flow of the fiber. This result shows that the singularity arising in the Kahler-Ricci flow of the fiber varies continuously depends on the parameter of the base spaces. This show the continuity of the Kahler cone of the fibers and pseudoeffective cones of the fibers.

研究分野：complex geometry

キーワード：ケーラー多様体　ケーラー・リッチ流　正閉カレント　ケーラー錐　多重種数　多重劣調和関数　ベルグマン核　極値的測度

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通)

1. 研究開始当初の背景

代表者は 1988 年に [3] で射影代数多様体に対するケーラー・リッチ流の理論を創始しました。その後、90 年代に代数幾何学において極小モデル理論が発展して、3 次元の射影代数多様体に対する極小モデルプログラムの完成を見ました。代表者はスケール付き極小モデルプログラムがケーラー・リッチ流のカレント解と完全に対応することに気づき、極小モデルプログラムをケーラー・リッチ流の理論で書き直すことにより、コンパクト・ケーラー多様体の極小モデル理論を確立することを思い付きました。

2. 研究の目的

X をコンパクト・ケーラー多様体、ω_0 を X 上のケーラー形式とするとき

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}(\omega(t)), \omega(0) = \omega_0 \tag{0.0.1}$$

を $X \times [0, T)$ 上で考える。ここで T は滑らかな解の極大存在時間である。この方程式をケーラー・リッチ流という。　この方程式は代表者により [3] で初めて考察され、初めは特異ケーラー・アインシュタイン計量を構成するのに使われた。

代数的で ω_0 がアンプル直線束 A に対して $2\pi c_1(A)$ となっている場合には、丁度、スケール付き極小モデルプログラムに対応するものであり、実際、射影代数的な場合にはその大域的カレント解が存在することが知られている。

本研究では極小モデルプログラムのケーラー版を構築するためにコンパクト・ケーラー多様体の上で、ケーラー・リッチ流を考察して、ケーラーリッチ流の解の構成とそのケーラー族の上でのパラメータ依存性について知ることを研究目的とする。

3. 研究の方法

$f : X \longrightarrow \Delta$ を単位円板 $\Delta := \{s \in \mathbb{C} | \, |s| < 1\}$ 上のコンパクト複素多様体の複素解析族とする。　今、全空間 X 上にケーラー形式が存在するとするとし、その一つを ω_0 として各 $t \in \Delta$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_s(t) = -\mathrm{Ric}(\omega_s(t)), \omega_s(0) = \omega_0 | X_s$$

を考える。$\omega_s(t)$ が s にどのように依存するかを知りたい。

そこで、次の補間的なリッチ流を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\omega}(t) = -\mathrm{Ric}(\tilde{\omega}(t)), \tilde{\omega}(0) = \omega_0 - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|s|^2 \log|s|^2)$$

この方程式は $s = 0$ で特異性をもつが、$\mathrm{Res}_{X_0}\tilde{\omega}(0) = \omega(0)|X_0$ となる。

この補間的なケーラー・リッチ流に関して

$$\mathrm{Res}_{X_0}\tilde{\omega}(t) = \omega_0(t)$$

となることを示すことにより X_0 上のケーラー・リッチ流と大域的なケーラー・リッチ流の関係をつけることができる。その解析には [2] と同様の手法を用いる。

補題 1 （小平の補題）X を非特異射影代数多様体、 L を X 上の巨大な *(big)* 直線束とする。

　このとき有効 $\mathbb{Q}$-因子 E で $L-E$ がアンプル $\mathbb{Q}$-因子となるものが存在する。

　特に L は特異エルミート計量で X 上至るところ真に正の曲率カレントを持つものを許容する。

小平の補題のケーラー版を考える。

定理 2 *(小平の補題のケーラー版)* X をコンパクト・ケーラー多様体、$\theta \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ を巨大なクラスとする。このとき真に正の正閉 $(1,1)$ カレント T で

(1) $[T]=\theta$,

(2) T は代数特異性をもつ、即ち任意の $x \in X$ に対して近傍 U とその上の正則関数 $\{g_\ell\}$ と正数 c で

$$T|U = c \cdot \log \sum |g_\ell|^2 + O(1)$$

となるものが存在する。

これを示すには次の結果を用いる。

定理 3 *([1])* X をコンパクト複素多様体でエルミート計量 ω を持つとする。$T=\alpha+i\partial\bar{\partial}\psi$ を X の上の正閉 $(1,1)$ カレントとする。ここで α は滑らかで ψ は擬多重劣調和関数とする。ある実 $(1,1$ 形式にたいし γ に対して $T \geqq \gamma$ を X 上で満たすとき、正閉 $(1,1)$ カレントの列 $T_k=\alpha+i\partial\bar{\partial}\psi_k$ が存在して次を満たす。

(i) ψ_k *(T_k)* はある X の解析的集合 Z_k の増大列 $\{Z_k\}$ で $X \backslash Z_k$ 上である。

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_k \subset X$$

(ii) $T_k \geqq \gamma - \delta_k\omega$ が成り立つ。但し $\lim_{\downarrow} \delta_k = 0$。

(iii) 列 $\{\psi_k\}$ は非増加で $\lim_{k\longrightarrow\infty} \psi_k = \psi$ を満たす。 また k が $+\infty$. に発散するとき $\{T_k\}$ は T に弱収束する。

(iv) Z_k の近傍で ψ_k は対数極をもつ。即ち $x_0 \in Z_k$ に対して近傍 U が存在して

$$\psi_k(z) = \lambda_k \log \sum_\ell |g_{k,\ell}|^2 + O(1)$$

が適当な正則関数 $\{g_{k,\ell}\}$ と $\lambda_k > 0$ に対して成り立つ。 さらに適当な改変 $\mu_k : X_k \longrightarrow X$ *of* X, が存在して ψ_k は X_k 上で局所的に

$$\psi_k \circ \mu_k(w) = \lambda_k \sum n_\ell \log |\tilde{g}_\ell|^2 + f(w)$$

と書ける。ここで $\{g_\ell\}$ は因子 D_ℓ の定義関数で $\sum D_\ell$ は単純正規交叉、n_ℓ は正整数で f は X_k 上の滑らかな関数である。

4. 研究成果

定理 4 X をコンパクト・ケーラー多様体として K_X が擬正 *(pseudoeffective)* であるとするとケーラー・リッチ流

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -Ric(\omega(t)), \omega(0) = \omega_0$$

は長時間正閉カレント解 $\omega(t)$ を持ち次の性質を満たす。

(1) $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_m < \cdots$ と X の空でない *Zariski* 開集合

$$X \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_m \supset \cdots$$

が存在して $\omega(t)$ は $U_i \times [T_{i-1}, T_i)$ 上で C^∞ ケーラー形式で

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -Ric(\omega(t))$$

を満たす。

(2) $\omega(t)$ は $[\omega_0] + 2\pi c_1(K_X) \cdot t$ を代表する極小特異正閉 $(1,1)$ カレントである。

定理 5 $f * X \longrightarrow S$ をコンパクト・ケーラー多様体のケーラー族とし、X 上の任意の C^∞ ケーラー形式と各ファイバー上のケーラーリッチ流 $(s \in S)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_s(t) = -Ric(\omega_s(t)), \omega_s(0) = \omega_0 | X_s$$

に対して X の空でない *Zariski* 開集合

$$X \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_m \supset \cdots$$

が存在して $\omega_s(t)$ は $U_i \times [T_{i-1}, T_i)$ 上で相対 C^∞ ケーラー形式で

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_s(t) = -Ric(\omega_s(t))$$

を満たす。

References

[1] [D-P] J.P.Demailly and M. Paun, Numerical characterization of Kähler cone, Annals of Mathematics, 159 (2004), 2047-2074.

[2] [K] S. Kikuta: Boundary behavior of Kähler-Einstein metric of negative ricci curvature over quasi-projective manifolds with boundary of general type, Kodai Math. J. 44(1): 81-114 (March 2021).

[3] [T] H. Tsuji: Existence and degeneration of Kähler-Einstein metrics on minimal algebraic varieties of general type , Math. Ann. 281, pages 123–133, (1988)

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　7件）

１．発表者名 Hajime Tsuji
２．発表標題 Approximation of invariant measures in complex geometry
３．学会等名 Hayama Conference in Several Complex Variables（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 Hajime Tsuji
２．発表標題 Application of p-Bergman kernels
３．学会等名 Complex Geometry Conference（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 辻　元
２．発表標題 Plurisubharmonic variation of invariant measures
３．学会等名 板東重稔退官記念シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Hajime TSUJI
２．発表標題 Adiabatic limits of Kahler Ricci flows
３．学会等名 複素幾何シンポジウム（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

1．発表者名
Hajime TSUJI

2．発表標題
Adiabatic Limits o Kahle Ricci flows

3．学会等名
Trends in Complex Geometry（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
辻　元

2．発表標題
Structure of the moduli spaces of metrized canonical models

3．学会等名
The 26th Symposium on Complex Geometry（招待講演）

4．発表年
2020年～2021年

1．発表者名
辻　元

2．発表標題
invariant metrics associated with L^p-holomorphic functions

3．学会等名
Grauert理論と最近の複素幾何（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2020年～2021年

1．発表者名
辻　元

2．発表標題
ベルグマン核の変動と標準測度の変動の関係について

3．学会等名
函数論サマーセミナー（招待講演）

4．発表年
2019年

1．発表者名 辻　元
2．発表標題 Application of canonical measures to the Iitaka conjecture
3．学会等名 複素幾何シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 辻　元
2．発表標題 Discretization of Kaehler-Ricci flows
3．学会等名 複素幾何シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 辻　元
2．発表標題 Invariatn volume forms in complex geometry
3．学会等名 岡シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 辻　元
2．発表標題 Monge-Ampere foliations associated with canonical measures
3．学会等名 多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

_

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関