

令和 6 年 6 月 20 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03286

研究課題名(和文)変形量子化と非可換指数関数の研究及びその応用

研究課題名(英文) Study on deformation quantization and noncommutative star exponentials, and its application

研究代表者

吉岡 朗 (YOSHIOKA, Akira)

東京理科大学・理学部第二部数学科・客員教授

研究者番号：40200935

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：変形量子化とは関数の通常の積を1パラメータで変形しstar積と呼ばれる積を導入することをいう。この積についての研究を行なった。これを用いて関数の変形を構成し、それらが満たす等式を得た。特に、指数関数の変形は特異点を持つことがわかり、そのいくつかの性質を明らかにした。変形量子化の計算は初等的かつ直接的である点に強みがあり、応用面では物理モデルの計算において力を発揮することができた。具体的な宇宙モデルに応用し、量子力学の不確定性関係式をプランク定数の2乗の微量まで計算する式を提示した。また、量子力学における固有値問題の計算も行なった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学術的な意義として、(1)量子計算の様々な関係式を、作用素ではなく関数を用いた初等的・直接的な式に表すこと、(2)様々な概念の非可換化を行う解析的・幾何学的方法を与えること、の2点を挙げることができる。社会的意義として、積が具体的な表示式により与えられることから、物理学・化学および工学における量子的な計算を、作用素ではなく関数のべき級数展開を用いて直接的かつ初等的に行うことが可能であり、将来、具体的な問題の解決に役に立つことが期待される点を挙げることができる。

研究成果の概要(英文)：Deformation quantization is to deform the usual product of functions into an associative product. The deformed product is called the star product. Using star products, we have constructed deformation of several functions and obtained the functional equations which the deformed functions satisfy. In particular, we study the deformation of exponential functions and has found that the exponential function has singular points and clarified some of its properties. The strength of the calculation of deformation quantization is that it is elementary and direct, and then, in terms of applications, it has been able to demonstrate its power in calculations of physical models. Applying it to a concrete cosmological model, we presented a formula that calculates the quantum mechanical uncertainty relation to the order of the square of Planck's constant. We also calculated eigenvalue problems in quantum mechanics.

研究分野：幾何学

キーワード：変形量子化 変形量子化代数の指数関数 convergent star product 変形量子化の応用 star Mittag-Leffler star Kummer function star gamma function star zeta function

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子論、重力理論等の数学的基礎を確立するという問題があり、さまざまな研究が行われて来た。例えば非可換座標系の導入 (Snyder [Sn47], Manin [Mn18]) や作用素環論に基づく非可換幾何学 (Connes [Cn94]) などがある。これらは、物理的関係式を表示する座標系に、ある非可換な関係式を満たす、という条件を付け加え関係式を書き直していくことであると言える (Connes [Cn19])。本研究は作用素環論とは異なる立場に立ち、より具体的な、収束べき級数による変形量子化代数を用いこれを実行することを出発点にしている。

(2) 研究開始当初においては、変形量子化が定義できる収束べき級数の集合が分かり変形量子化の代数の枠組みを得ていた。次の段階としてさまざまな関数をこの代数を用いて書き直すこと、すなわち変形量子化により関数等の基本対象の変形をひとつひとつ調べていく作業を行っていた。その過程で、解析学、幾何学において最も基本的な対象の一つである指数関数・指数写像を調べることが重要なことであることが分かり指数関数について研究を始めていた。特に変形量子化代数における指数関数は通常の関係環におけるものとは異なり特異点を持つことがその特徴であることが分り、これをいかに扱うか、その性質を明確化できるか、が問題の一つであるとの認識を持っていた。

2. 研究の目的

上に述べた経緯から、本研究計画では、収束べき級数からなる変形量子化代数において、1次式、2次式の指数関数の性質を調べることが目的とする。これらは通常の関係関数とは異なり特異点を持ち、これらが変形量子化代数にさまざまな特徴的な性質を与えることが今までの研究を通じ分かって来た。例えば、特異点の典型的な型として分岐特異点があり、これが指数関数の集合を考えたとき、その幾何的な性質としていわゆる gerb の構造を出現させることなどを挙げることができる。このことから、指数関数の特異点とその性質をさまざまな角度から解明していくことも目的の一つとする。また、gerb の例も含め、変形量子化代数における特異点の影響は、物理学および幾何学における具体的な例に現れることが期待される。そこで、具体的な系にたいする変形量子化代数の応用を調べることが目的とする。例えば量子系の固有値問題と対称性の関係が論じられるシンプレクティック簡約の手法がありここにおいてリー群つまり指数関数が用いられる。この簡約化の手法が変形量子化代数においてどのような形式で構成できるかを調べることなどである。

3. 研究の方法

(1) 多項式の各項における座標関数のべき乗を変形量子化代数の積に置き換えたものを見ると自然に変形量子化代数の元が得られる。これを単純に正則関数のべき級数展開に拡張すると、一般には発散級数となり変形量子化代数の元を与えない。これに対し、まず、特殊関数などで知られている、通常の関係関数を用いた関数の積分表示等において指数関数の部分を変形量子化代数の指数関数に置き換える方針で変形を考える。調和振動子の量子化など具体的な物理系における計算例を参照しながら一般の場合への拡張を行う。これを手がかりにその他の方法を探っていく。

(2) 具体的な物理系に変形量子化代数を適用した研究を行う。形式的べき級数ではなく、変形パラメータが数である収束べき級数の変形量子化の強みを活かし、物理学の専門家と共同で具体的な計算・評価を行いつつ系の性質を調べる。また、数理論理学で与えられた量子モデルに対して作用素を用いた計算の部分を変形量子化に置き換え、対称性による簡約化等を試みる。これを通して群の作用および変形量子化代数の指数関数の役割を調べる。

(3) 収束べき級数の変形量子化代数における2次式の指数関数の収束性は非常に微妙な部分があり、特異点の性質、漸近展開の性質など調べなければならないことが数多くある。上に挙げた二つの方法による研究を通じて、収束性・特異性に関し、一つ一つの具体例に対する考察を積み上げていくことでその性質・法則性を明らかにし、一般的な場合への拡張を考えていく。

4. 研究成果

主要な結果は次の(1)、(2)、(3)に分けて挙げるができる。

(1) 変形量子化代数において、Kummer 関数、Gamma 関数、Zeta 関数などの具体的な関数の変形を構成した。さらにこれらの関数の関数等式を得た。特に、これらの変形された関数は変形量子化代数のもつ強い位相に関し収束していることがわかった(吉岡 [Y1-Y3, TY4, TY5])。

(2) 解析関数のべき展開の各単項式の生成元べき乗を単純に star 積 (変形量子化代数における積をこう呼ぶ) によるべき乗に置き換えて和をとると一般には発散級数となり変形量子化代数の元を定めないことが示せる。そこで、上記(1)において star 積による指数関数を用いて

変形を与える方法により変形量子化代数の元を構成できた。この元を逆に漸近展開することにより、指数関数がこれらの発散級数の一つの正則化を与えることであるとの知見を得た。現段階ではいくつかの具体例で確認でき、その他の基本的な関数に対し研究中である。これからさらに関数例を増やし一般化していきたいと考えている(吉岡 [YTY6])。

(3) 変形量子化の物理モデルへの応用として、量子物理学の不確定性原理についての研究を行った。ハイゼンベルクの不確定性原理は数学的には、位置と運動量を表す作用素の交換子がプランク定数の複素数単位倍であると表わされる。これをさらにプランク定数の2次式までの大きさを評価できるというものである。シュワルツシルド宇宙モデルの系を変形量子化により変形し非可換項のずれを計算することで評価式を導くというものである。物理学者との共同研究により結果を得たもので、評価式を導くための変形量子化の非可換な計算を行った([KLVY19])。宇宙モデルの研究と関連し、共同研究によりいくつかの具体例の計算を行い発表した([KYL18],[YY18],[YY18_2],[YY21])。また、量子系の固有値問題に対し変形量子化とシンプレクティック簡約を適用し対称性のある多様体上に形式的ではない変形量子化を構成するための計算を行ない、古典力学系に関する部分についてマスロフ条件についての問題を議論した([KY19])。

(4) 形式的でない変形量子化は、本研究における展開式により定義する方法のほかに、L2空間への作用として変形量子化代数を定式化する方法がある。これに対し本研究の方法は、素朴であるが具体的で直接的である点とその特徴と言える。そのため特異点が現れまた漸近級数の収束性に関する微妙な議論を行う必要があるなど、難しい問題を含んでいるが、そのことは逆に、代数の含む幾何学が豊富であることを意味する。形式的べき級数による変形量子化の存在・分類問題を解決する初期の段階からこのテーマで研究を続けて来たが、現在はその次の段階である、より多くの情報を含む形式的ではない変形量子化を研究する局面にあり、その基礎はできつつあると捉えている。国内外でこの立場で研究する人々は今では数多く存在し、個々のテーマ、方法は多岐にわたるようになって来ている。本研究において得られた成果は、その流れの中にあり、ささやかではあるが必要とされる基本的な部分の研究において貢献しているものと評価している。

(5) 基礎研究においては、当初に見込んでいたこと以外に新たな発見があり、それを基に次の段階へと軌道修正しつつ進んでいかざるを得ない面がある。それを踏まえて、いま考えられる今後の展望としては、本研究において期せずして分かった、変形量子化代数における指数関数の発散級数を正則化する働き、を調べることであり、それにより発散級数の取り扱いに何がしかの手がかりが得られるのではないかと期待できることである。これを一つのテーマとして継続して変形量子化代数を調べていきたいと思う。また、展望の一つとして、変形量子化をさまざまな問題に応用することがある。特に、変形量子化とは異なる分野の手法・研究を参考にしながら考えることが有用であろう。この過程で、変形量子化のもつ意味がより明確になるのではないかと期待される。変形量子化は展開式を利用する素朴な方法であり、それゆえの煩雑さ難しさもあるが、その直観に訴える直接的な計算の持つ強みが科学技術におけるさまざまな分野で役に立つことを期待したいと思う。

<引用文献>

- [Sn47] H. Snyder, Quantized Space-Time, Phys. Rev. 71 (1947), 38-41
- [Mn18] Y. Manin, Quantum groups and noncommutative geometry, CRM Short Courses,2,With a contribution by Theo Raedschelders and Michel Van den Bergh, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC; Springer, Cham,2018
- [Cn94] A. Connes, Noncommutative géométrie,Academic Press, Inc., San Diego, CA,1994
- [Cn19] A. Connes, La géométrie et le quantique, CNRS Éditions, Paris, 2019
- [Y1] Akira Yoshioka, Star products, Star exponentials, and Star functions, Steam-H : Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics and Health, Mathematical structures and applications, 2018,439-451
- [Y2] Akira Yoshioka, Star product and star functions, Bulletin of Russian universities. Mathematics, 24, 2019, 281-292
- [Y3] Akira Yoshioka, Star Kummer function, Proceedings of the twenty first international conferece on Geometry, Integrability and Quantizations XXI, 2020, 328-333
- [TYY4] Tsukasa Takeuchi, Naoko Yoshimi, Akira Yoshioka, Star product deformation of Gamma function, Geometry, Integrability and Quantization, 26, 2023, 53-63
- [TYY5] Tsukasa Takeuchi, Naoko Yoshimi, Akira Yoshioka, Deformation of functions by star product, to appear in Trends in Mahematics, Geometric methods in physics XL workshop, Bialowieza,
- [YTY6] Akira Yoshioka, Tsukasa Takeuchi, Naoko Yoshimi, Star Mittag-Leffler function,

Geometry, Integrability and Quantization, 22, 2021, 301-307

[KLVY19] Tomoyo Kanazawa, Gaetano Lambiase, Gaetano Vilasi, Akira Yoshioka, Noncommutative Schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle, The European Journal C, Springer,19,2019

[KYL18] Tomoyo Kanazawa, Akira Yoshioka, Gaetano Lambiase, Gaetano Vilasi, Scalar-tensor theories of gravity with torsion and the propagation of photons, International Journal of Geometric methods in Modern Physics, 15, 2019,

[YY18] Naoko Yoshimi, Akira Yoshioka, 2+1-Moulton configuration, Journal of geometry and symmetry in physics, 50, 2018, 79-95

[YY18_2] Naoko Yoshimi, Akira Yoshioka, 3+1-Moulton configuration, SUT journal of mathematics, 54, 2018, 173-190

[YY21] Naoko Yoshimi, Akira Yoshioka, 4+1-Moulton configuration and positive mass deformation, Proceedings of the Twenty-second international conference on Geometry, Integrability and Quantization, 22, 2021, 286-300

[KY19] Tomoyo Kanazawa, Akira Yoshioka, Quasi-classical calculation of eigenvalues by Malsov quantization condition, Proceedings of the twentieth international conference on Geometry, Integrability and Quantization XX, 2019, 184-207

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 Yoshimi Naoko, Yoshioka Akira	4. 巻 22
2. 論文標題 4+1-Moulton Configuration and Positive Mass Deformation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometry, Integrability and Quantization	6. 最初と最後の頁 286-300
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/giq-22-2021-286-300	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Akira Yoshioka, Tsukasa Takeuchi, Naoko Yoshimi	4. 巻 22
2. 論文標題 Star Mittag-Leffler Function	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Twenty-Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization XXII	6. 最初と最後の頁 301-307
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/giq-22-2021-301-307	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Akira Yoshioka	4. 巻 24
2. 論文標題 Star product and star function	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 of Russian universities. mathematics) (Bulletin	6. 最初と最後の頁 281-292
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20310/2686-9667-2019-24-127-281-292	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Akira Yoshioka	4. 巻 21
2. 論文標題 Star Kummer Function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Twentieth First International Conference on Geometry, Integrability and Quantization XXI	6. 最初と最後の頁 328-333
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/giq-21-2020-328-333	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kanazawa, T, Yoshioka, A, Lambiase, G., Vilasi, G	4. 巻 15
2. 論文標題 Scalar-tensor theories of gravity with torsion and the propagation of photons	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Geometric Methods in Modern Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219887818501761	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshioka, A.	4. 巻 -
2. 論文標題 Star Products, Star Exponentials, and Star Functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics and Health, Mathematical Structures and Applications	6. 最初と最後の頁 439-451
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-97175-9_20	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yoshimi, N., Yoshioka, A.	4. 巻 50
2. 論文標題 2+1-Moulton Configuration	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of geometry and symmetry in physics	6. 最初と最後の頁 79-95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/jgsp-50-2018-79-95	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yoshimi, N., Yoshioka, A	4. 巻 54
2. 論文標題 3+1-Moulton Configuration	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SUT journal of mathematics	6. 最初と最後の頁 173-190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.55937/sut/1549536790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kanazawa, T., Yoshioka, A.,	4. 巻 20
2. 論文標題 Quasi-classical calculation of eigenvalues by Maslov quantization condition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the twentieth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization XX	6. 最初と最後の頁 184-207
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/giq-20-2019-184-207	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kanazawa, T., Lambiase, G., Vilasi, G., Yoshioka, A.	4. 巻 79
2. 論文標題 Noncommutative Schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The European Physical Journal C	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1140/epjc/s10052-019-6610-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takeuchi Tsukasa, Yoshimi Naoko, Yoshioka Akira	4. 巻 26
2. 論文標題 Star Product Deformation of Gamma Function	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometry, Integrability and Quantization	6. 最初と最後の頁 53-63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/giq-26-2023-53-63	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takeuchi Tsukasa, Yoshimi Naoko, Yoshioka Akira	4. 巻 -
2. 論文標題 Deformation of Functions by Star Product	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Trends in mathematics, Geometric Methods in Physics XL, workshop Bialowieza	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Akira Yoshioka
2. 発表標題 Star Product Deformation of Special Functions
3. 学会等名 Twenty-Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akira Yoshioka
2. 発表標題 Convergent star products and star functions
3. 学会等名 International Conference on Geometry and Quantization GEOQUANT 2019 in Taiwan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉岡 朗
2. 発表標題 *積による関数の変形
3. 学会等名 Poisson幾何とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Yoshioka
2. 発表標題 Non-formal star product and star functions
3. 学会等名 Conference on Complex Analysis and Mathematical Physics, dedicated to the 70th birthday of A. G. Sergeev (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉岡 朗
2. 発表標題 Star product and several star functions
3. 学会等名 XL Workshop on Geometric Methods in Physics (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計4件

1. 著者名 Ivailo Mladenov, Vladimir Pulov and Akira Yoshioka	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences	5. 総ページ数 307
3. 書名 Proceedings of the Twenty-Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization XXII	

1. 著者名 Ivailo M. Mladenov, Vladimir Pulov, Akira Yoshioka	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences	5. 総ページ数 310
3. 書名 Proceedings of the Twenty-Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization XXII	

1. 著者名 Edited by Ivailo Mladenov, Vladimir Pulov and Akira Yoshioka	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences	5. 総ページ数 -
3. 書名 Proceedings of the International Conference on Geometry, Integrability and Quantization	

1. 著者名 Ivailo Mladenov, Vladimir Pulov, Akira Yoshioka, e.d.,	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Avangard Prima, Sofia, Bulgaria	5. 総ページ数 312
3. 書名 Proceedings of the Twentieth international conference of Geometry, Integrability and Quantization XX	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Twenty-Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 XXIst International Conference on Geometry, Integrability and Quantization	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------