

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：32670

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03288

研究課題名(和文) ループ群作用に関する同変指数理論とその局所化

研究課題名(英文) Loop group equivariant index theory and its localization

研究代表者

藤田 玄 (FUJITA, Hajime)

日本女子大学・理学部・准教授

研究者番号：50512159

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：トーラス作用をもつ非コンパクト多様体上で、作用の軌道に沿った微分作用素による摂動を用いた解析的指数理論を展開した。また、その解析的指数を与えるKKホモロジーサイクルも自然に定義できることもわかった。

北別府悠氏(熊本大学)と三石史人氏(福岡大学)との共同研究により、ある強い仮定の下でのトーリック多様体とDelzant多面体間のDelzant構成のGromov-Hausdorff収束に関する連続性に関する結果を得た。Delzant多面体上の双対平坦構造のダイバージェンス関数について、トーリック幾何の知見を用いて拡張Pythagorasの定理を境界まで拡張することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

先行研究を群作用がある状況で発展および応用させ、既存の結果により見通しのよい理解を与え、さらに非コンパクトな設定への一般化を得た。

研究で得たトーリック幾何の知見を活かし、Delzant対応の連続性や、トーリック幾何を用いた双対平坦構造の研究とその情報幾何的応用という新たな研究課題へとつながった。

研究成果の概要(英文)：We developed an analytic index theory on non-compact manifolds with torus action via deformation by using differential operator along orbits. In addition we proved that a KK-homology cycle giving the analytic index is naturally defined.

As a joint work with Yu Kitabepu (Kumamoto univ.) and Ayato Mitsuishi (Fukuoka univ.) we had a continuity of the Delzant construction between toric manifolds and Delzant polytopes under a relatively strong assumption.

We had an extension of the generalized Pythagorean theorem to the boundary for the divergence of the dually flat structure on a Delzant polytope via toric geometry.

研究分野：幾何学

キーワード：Dirac作用素 局所化 トーリック多様体 Gromov-Hausdorff収束 双対平坦構造 ダイバージェンス 情報幾何学

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

多様体の幾何学的不変量がその多様体のある部分領域に局所化するという現象が多くの場合で現れる。この現象は不変量の計算の観点および理論的観点からも重要であり、これまで多くの研究と応用がなされてきた。古田幹雄氏と吉田尚彦氏との共同研究を含む一連の研究において、シンプレクティック幾何学における局所化現象のよりよい理解を得るために Dirac 作用素の解析的指数の局所化の理論を構築してきた。一方、高田土満氏や Y. Loizides 氏、Y. Song 氏らによって Dirac 作用素の解析的指数理論は無限次元多様体への一般化が考察されている。特に、Hamilton 群作用をもつシンプレクティック多様体の一般化としてループ群の Hamilton 作用をもつ無限次元シンプレクティック多様体への一般化が活発に研究されてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、これまでの研究の発展/応用として、近年活発に研究されているループ群作用に関する無限次元多様体上の指数理論において、有限次元の場合に現れたある種の格子点への幾何学的な局所化現象を考察することである。

3. 研究の方法

これまでの(共同研究を含む)研究において確立したファイバー束の族およびそのファイバーに沿った微分作用素の族による Dirac 作用素の摂動理論を用いる。主な研究対象はループ群が作用する無限次元シンプレクティック多様体ないしはその一般化上で定まる同変 Dirac 型作用素の解析的同変指数である。その第一段階として、非コンパクトな多様体上の理論を考察する。それらの指数に対して摂動から見出される指数の局所化現象を考察し、無限次元多様体上の指数理論に新たな知見を与える。

4. 研究成果

(1) 非コンパクト多様体上の Dirac 型作用素の解析的指数とその KK ホモロジー類の定式化
Loizides-Song らはコンパクト Lie 群のループ群の Hamilton 作用に対してある種の量子化を定義している。彼らは spin-c 量子化、すなわちある種の Dirac 作用素の指数として量子化を定義したのであるが、その議論において無限次元多様体のある有限次元非コンパクト多様体上の Dirac 型作用素の指数が本質的な役割を果たす。本研究でも、無限次元の設定で適切な指数理論あるいは付随する量子化の理論を確立するために、これまでに確立したファイバー束の族およびそのファイバーに沿った微分作用素の族による Dirac 作用素の摂動理論をトーラス作用をもつ非コンパクトな多様体への設定に拡張した。その際、摂動に用いるファイバーに沿った微分作用素の族として、先行研究のものとは異なり、より群作用の性質を反映するものを用いた。その摂動項は、Kasparov による orbital Dirac 作用素から着想を得たものである。摂動項を群作用に由来するより自然なものに取り替えた恩恵として、摂動された作用素の Fredholm 性の証明が簡明になり、さらにその議論により KK ホモロジーサイクルが得られることもわかった。この議論により、ある技術的な仮定をみだす非コンパクトトーリック多様体の幾何学的量子化として(摂動された)Dirac 型作用素の指数を考えると、運動量写像の格子点で記述されるという Danilov 型の定理および非コンパクトな Hamiltonian トーラス多様体に対する量子化とシンプレクティック簡約の可換性の証明が得られた。また、先行研究では不明確であった Braverman の摂動理論との関係についても、適当な仮定のもとでの一致が証明できた。この結果は Canadian Journal of Mathematics に掲載された。

また、Loizides-Rodsphon-Song らによって、orbital Dirac 作用素による摂動から得られる指数を KK ホモロジー類のペアリングと理解する結果が、我々の摂動項に対しても成立することがわかった。この理解により、既存の消滅定理や同境定理の幾何学的な証明が得られることがわかったが、既存の定理と超える応用は残念ながら得られなかった。

(2) トーリック多様体と Delzant 多面体の Gromov-Hausdorff 収束の関係

これまでの研究で得られたトーリック多様体に関する知見をもとに、トーリック多様体と Delzant 多面体の間の Delzant 構成の連続性に関する研究の着想を得た。この研究に関して、

北別府悠氏(熊本大学)と三石史人氏(福岡大学)との共同研究を開始し, 比較的強い仮定のもとでの連続性の結果を得た. この方向の研究についてはより一般の設定での連続性など, 今後考えるべき問題が明らかとなった.

(3) Delzant 多面体の双対平坦構造とそのダイバージェンスの境界への拡張

凸多面体の内部上には定義方程式から定まる自然な双対平坦構造がある. 付随するダイバージェンス関数がある意味で境界まで連続的に拡張できることがわかる. トーリック多様体に付随する Delzant 多面体については, さらにそのダイバージェンスについて拡張 Pythagoras の定理が多面体の境界まで拡張できることがわかった. この結果は Information Geometry に掲載された. (2)の問題と同様に, 今後考えるべき問題があきらかになった.

(4) まとめ

当初の目的であった Hamilton ループ群作用に関する無限次元シンプレクティック多様体上の指数理論の構築には至らなかったが, 重要なステップである非コンパクトな多様体上の指数理論の構築ができたことは大きな収穫であった. また, 本研究で得られたトーリック多様体に対する知見から新たな問題意識が生み出されたことは大きな収穫であったと考えられる.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 FUJITA, Hajime	4. 巻 0
2. 論文標題 Deformation of Dirac operators along orbits and quantization of non-compact Hamiltonian torus manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1~31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S0008414X2100016X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 AKIYAMA Rika, ABE Nozomi, FUJITA Hajime, INABA Yukie, HATAOKA Mari, ITO Shiori, SEITA Satomi	4. 巻 5
2. 論文標題 Maximum Genus of the Jenga Like Configurations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Recreational Mathematics Magazine	6. 最初と最後の頁 49~64
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2478/rmm-2018-0002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 FUJITA, Hajime	4. 巻 0
2. 論文標題 The generalized Pythagorean theorem on the compactifications of certain dually flat spaces via toric geometry	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 0
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-023-00123-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 19件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 非コンパクト多様体に対するあるトーラス同変指数について
3. 学会等名 第69回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 Torus equivariant index for non-compact manifolds
3. 学会等名 Symplectic geometry and its applications (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 非コンパクトシンプレクティック多様体のトーラス同変 Riemann-Roch 数について
3. 学会等名 第48回変換群論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 非コンパクト多様体に対するトーラス同変指数の構成とその応用
3. 学会等名 九州大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 Convergence of symplectic toric manifolds and Delzant polytopes
3. 学会等名 第47回変換群論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 Distance functions on polytopes and metric geometry of symplectic toric manifolds
3. 学会等名 McMaster Geometry and Topology seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 A K-homology cycle via perturbation by Dirac operators along orbits,
3. 学会等名 2019 CMS winter meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 Geometric quantization of non-compact Hamiltonian torus manifolds
3. 学会等名 Symplectic seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 1次元多様体の離散化に関する話題
3. 学会等名 ハンドルセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 Delzant多面体のモジュライ空間上の距離関数について
3. 学会等名 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 シンプレクティック多様体上のディラック型作用素の指数とその局所化について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 How can we measure the distance between geometric objects?
3. 学会等名 Joint Symposium 2018, Ewha Womans University, Japan Women's University and Ochanomizu University for the promotion and research for women in science (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 Distance functions on the moduli space of convex polytopes and symplectic toric manifolds
3. 学会等名 松山TGSAセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 Torification of dually flat manifolds and its application
3. 学会等名 変換群の幾何とトポロジー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 Delzant 多面体の双対平坦構造とPythagoras の定理の境界への拡張について
3. 学会等名 第70 回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 トーリックKähler 多様体と双対平坦多様体, Delzant 多面体の双対平坦構造の境界への拡張について
3. 学会等名 ミニワークショップ統計多様体の幾何学とその周辺(15) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 The generalized Pythagorean theorem on the compactifications of certain dually flat spaces via toric geometry
3. 学会等名 Statistical Theories and Machine Learning Using Geometric Methods (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤田玄
2. 発表標題 トーリック幾何と双対平坦多様体- 拡張ピタゴラスの定理の拡張-
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 FUJITA, Hajime
2. 発表標題 A "generalized " generalized Pythagorean theorem on a compactification of the dually flat manifold via toric geometry
3. 学会等名 6th Tropical Geometry Workshop (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関