様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３２８９

研究課題名（和文）平坦接続のモジュライ空間と４次元軌道体の一意化

研究課題名（英文）Moduli spaces of flat connections and uniformization of 4-orbifolds

研究代表者
福本　善洋（Fukumoto, Yoshihiro）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：９０３４１０７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、有限の対称性を持つ４次元空間を、その対称性で割った商空間である軌道体から、平行移動を用いて逆に構成する一意化の理論を構築することが目標であり、電磁気学の一般化であるドナルドソン理論およびザイバーグ・ウィッテン理論の双方からの接近を図った。とくに負定値４次元軌道体に(m,1)および(m,-1)型のレンズ空間の錐の対が生成される現象を応用しザイフェルトファイバー有理ホモロジー３球面の負定値同境に関する拘束条件を得た。また、ザイバーグ・ウィッテン理論において10/8不等式の軌道体版を応用し鉛管型ホモロジー３球面の間のスプライシングに関するbounding genusの評価公式を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
レンズ空間の対生成を応用した、Seifertファイバー有理ホモロジー３球面の負定値同境に関する拘束条件は、Fintushel-Stern不変量などによる従来の手法とは異なり、負定値同境の整数係数のホモロジーに関するより精密な情報を得ることが可能となった点に注意したい。また、bounding genusは、３次元ホモロジー球面のホモロジー同境群において、ある種の距離を与える重要なホモロジー同境不変量であり、現在までのところ手術公式が知られていなかった。本結果によって、とくにスプライシング操作に関する振る舞いが解析可能となり、より広いクラスのホモロジー球面の間の距離を評価することが可能となった。

研究成果の概要（英文）：A purpose of our research is to use a method of parallel transport to develop a theory of uniformization in dimension four, that is construction of 4-spaces which have finite symmetry from 4-orbifolds obtained by identification of points which are mapped via symmetry operations in the 4-spaces. To achieve this aim, we take approaches from two gauge field theories, which are generalizations of electromagnetism, called Donaldson theory and Seiberg-Witten theory. Several results are obtained in our research. In particular, in Donaldson theory, we obtained constraints on the topology of negative-deifinite cobordisms among Seifert fibered rational homology 3-spheres by an application of bubbling phenomena of instantons on negative-definite 4-orbifolds. On the other hand, in Seiberg-Witten theory, we apply an orbifold version of 10/8-inequality to obtain estimates of a homology cobordism invariant of homology 3-spheres called bounding genus for splicings among plumbed homology 3-spheres.

研究分野：4次元トポロジー

キーワード：インスタントン　負定値同境　4次元軌道体　一意化　ザイバーグ・ウィッテン・モノポール　ホモロジー同境　スプライシング　有理ホモロジー3球面

１．研究開始当初の背景

幾つかの 3 次元多様体 Y_i を境界 $\partial W = \cup_i Y_i$ に持つ滑らかな 4 次元多様体 W を特徴付けることは，3 次元多様体の間の関係や，4 次元多様体の構成単位を探求する上で基本的な課題であり，位相的場の理論を構築する基礎的な役割を果たすことが期待される．以下，多様体はすべて滑らかであるものとする．

本研究は，3 次元多様体の同境問題に関する，Donaldson 理論と Seiberg-Witten (以下，SW) 理論を応用した二つの研究の流れを汲む．以下の双方の研究は互いに相補的な側面がある．

11/8 予想：1982 年に松本幸夫氏によって提示された 11/8 予想は，任意の滑らかなスピン 4 次元閉多様体 X の符号数 $\sigma(X)$ と第 2 Betti 数 $b_2(X)$ の間の不等式 $11/8 \cdot |\sigma(X)| \leq b_2(X)$ を主張する．これは 3 次元ホモロジー球面を境界とする滑らかなスピン 4 次元多様体の交叉形式から定まるホモロジー同境不変量 (bounding genus) $|\Sigma|$ の上界評価から定式化された未解決予想であるが，古田幹雄氏により，SW 方程式の有限次元近似を用いて 10/8 不等式が証明されている．近年，C. Manolescu により $Pin(2)$ 同変 SW Floer K-理論から，境界付き 4 次元多様体に対する 10/8 不等式が導出された．

ホモロジー同境群 Θ_3^H の構造：3 次元ホモロジー球面のホモロジー同境群 Θ_3^H は，連結和に関してアーベル群をなす．Donaldson 理論を用いた古田幹雄氏の結果 $\mathbb{Z}^\infty \subset \Theta_3^H$ は，インスタントン・モジュライ空間の仮想次元 (Fintushel-Stern 不変量) とモジュライ空間のコンパクト性を用いる．一方，Rohlin 不変量 μ が非自明となる 2 捻れ元の存在問題は，松本堯夫氏，D. Galewski-R. Stern による位相多様体の三角形分割可能性と関わり，Manolescu の $Pin(2)$ 同変 SW Floer ホモトピー型により μ の整数持ち上げ写像が構成され，否定的に解決された．また，M. Stoffregen により Manolescu 不変量および Heegaard-Floer 理論から $\mathbb{Z}^\infty \subset \Theta_3^H$ が再証明されている．

これらの流れを念頭に置き，筆者は 3 次元多様体の同境圏の観点から主に以下の研究を行ってきた．

(1) Bounding genus $|\ |: \Theta_3^H \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ の決定とその 3 次元多様体の同境圏への一般化

スピン 4 次元閉軌道体の 10/8 不等式を用いて，古田氏との共同研究で導入したホモロジー同境不変量 (w 不変量) による bounding genus の下界評価を与え Seifert ホモロジー 3 球面の無限族に対して bounding genus の値を決定した．さらにこれを 3 次元多様体の同境圏 $\mathcal{C}_3$ に対して一般化した．

(2) レンズ空間の間の負定値同境と，その 4 次元軌道体の有限一意化への応用

P. Lisca による滑らかなホモロジー球体の境界となるレンズ空間に対 $L\#\bar{L}$ が生成される現象に注目し，管状の端を持つ 4 次元多様体上のインスタントン・モジュライ空間の解析を用いて，レンズ空間の負定値同境に対しても対 $L\#\bar{L}$ と，それらを繋ぐ $U(1)$ 平坦接続の存在を示した [2].

(3) Kronheimer-Mrowka の結び目の特異インスタントン・ホモロジーと Lagrange 交叉理論

筆者は，P. Kirk と J. Pinzón-Caicedo との共同研究 [1] により，Hedden-Herald-Kirk による P. Kronheimer と T. Mrowka の結び目の特異インスタントン・ホモロジーに関する，4 点穴あき球面の基本群の零跡 $SU(2)$ 表現空間上における Lagrange 交叉理論による解釈のもとで，2 本タングルの補空間の基本群の双二面体群表現を特徴付け，トーラス結び目等に関する Lagrange 交叉の解析を行った．

(1) で Donaldson 理論がそのままでは適用できない一方で，(2),(3) では SW 理論がそのままでは適用できない．こうして以下の問いが自然に生じる．

問い：Donaldson 理論で捉えることができる幾何学的現象で，Seiberg-Witten 理論では直接捉えることが難しい現象は何か？ また，一つの現象の双方の理論による解釈を繋ぐ機構は何か？

本研究では上記の問題意識を踏まえ，ホモロジー 3 球面のホモロジー同境，および 4 次元軌道体の一意化において現れる幾何学的現象に着目する．

２．研究の目的

本研究の目的は，１．研究開始当初の背景における (1), (2), (3) から得られた結果や知見を基に，Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論の相補的関係に注意を払い，3 次元多様体と結び目の組に対する同境圏 $\mathcal{C}_{3,1}$ の構造を明らかにし，4 次元軌道体の一意化理論を構築することにある．その試みとして以下の課題を設定した．

(1) 3 次元多様体と結び目の組の bounding genus の定式化と結び目理論への応用

(2) 管状の端を持つ 4 次元多様体と曲面の組の特異インスタントンのモジュライ空間の端の解析

(3) 4 次元軌道体の一意化理論の構築

(1) に関して，結び目は 3 次元多様体 Y における 1 次元部分多様体 $K \subset Y$ として捉え，これを Y において研究する方法が一般的であると考えられるが，本研究では，3 次元多様体 Y と結び目 K の組 (Y, K) を対象として，これを 4 次元多様体 X と曲面 S の組の境界 $(Y, K) = \partial(X, S)$ とみなし，4 次元多様体上のゲージ理論の研究手法や諸結果を応用する方法をとる．この方法により，結び目のコンコーダンス不変量の構成をはじめ，一般の 3 次元多様体における結び目 (Y, K) に特有な現象や，2,3,4 次元の位相的場の理論に関して新たな知見を得ることが一つの目標である．

(2) は，管状の端を持つ 4 次元多様体上のインスタントン・モジュライ空間のトポロジーを考察し，管状の端に向かってエネルギーが逃げていくインスタントンの極限として $SU(2)$ 平坦接続を捉える方法である．この方法は古田氏によって 4 次元軌道体上の特異点におけるバブルとして研究されていたもので，本研究ではこれを管状の端を持つ 4 次元多様体に対して一般化し，さらにホロノミー摂動を用いて $U(1)$ 平坦接続の存在を示すことでホモロジーの情報のみで統制された点に重要性がある．一方で，Seiberg-Witten 理論ではバブル現象がなく，またモノポール方程式と $SU(2)$ 平坦接続を結びつける直接的な方法がないため，同様の結果を再証明することは難しいと考えられる．

(3) 4 次元軌道体の有限一意化は，(2) において特に境界が球面空間型 S^3/G の場合に Fox 完備化により得られる．有限分岐被覆の存在に関する Fenchel の問題は，複素射影平面上の直線配置の有限一意化に関する加藤十吉氏の結果があるが，レンズ空間の錐特異点の局所一意化を与える 4 次元軌道体の有限一意化の存在は，Casson-Gordon の σ 不変量による障害とは逆の新しい方向性である．

３．研究の方法

上記の２．研究の目的で設定した課題 (1)-(3) について取り組んできた研究方法を述べる．

(1) 3 次元多様体と結び目の組の bounding genus の定式化と結び目理論への応用

3 次元ホモロジー球面と結び目の対 (Y, K) の bounding genus $|Y, K|$ の下界評価に関しては，(Y, K) のスピン同境 (W, S) に対し，Y を S^3 内の枠付き絡み目 L に沿って特異 2-把手 $D^2 \times_G D^2$ を接着することで，Y を境界とする 4 次元軌道体 $\hat{W}$ を構成する．W の交叉形式の考察よりスピン 4 次元軌道体 $\hat{W}$ に 10/8 不等式を適用することで，(W, S) に関する制約を，$w(Y, X)$ および (Y, K) によって与え，さらに bounding genus $|Y, K|$ の下界評価を与える．

(2) 管状の端を持つ 4 次元多様体と曲面の対の特異インスタントン・モジュライ空間の端の解析

整数重み付きグラフ Γ から鉛管操作によって構成される 4 次元鉛管多様体 $P(\Gamma)$ は境界 $\Sigma(\Gamma)$ を持ち，互いに交わらない幾つかの線形部分グラフ E_i に対応する因子の近傍を $P(\Gamma)$ から切り取ることでレンズ空間 $\Sigma(E_i)$ を境界に持つ 4 次元多様体が構成される．これにより，レンズ空間 Y_i との間に負定値同境 W, $\partial W = \Sigma \cup \coprod_i (-Y_i)$ が存在するような有理ホモロジー球面 Σ を特徴付け，そのような $\{\Sigma_i\}$ の間の負定値同境における対 $\Sigma \sqcup \Sigma'$ や $U(1)$ 平坦接続 χ の存在を示す方法が考えられる．

(3) 4 次元軌道体の一意化理論の構築

$N = \cup_i N_i$ の境界 $Y = \partial N$ 上の平坦接続 $\rho_i : G_i \to U(1)$ を持つ管状の端 $\mathbb{R}_+ \times Y$ を持つ 4 次元多様体 X 上の $SU(2)$ 束 $\mathbf{P}$ におけるインスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathbf{P})$ の端を考察することで，Y 上の平坦接続 $\rho_i : G_i \to U(1)$ が X 上の平坦接続に拡張することの証明を試みる．これにより，閉曲面 Σ_i 上の D^2 束 $\tilde{N}_i$ への G_i 作用による商軌道体 $N_i = \tilde{N}_i / G_i$ に対して，$\cup_i N_i$ を部分軌道体としてもつ 4 次元軌道体 X の有限一意化を与えることができるものと期待される．

４．研究成果

以下，３．研究の方法で述べた課題について，その研究成果を述べる．

(1) ３．の課題 (1) に関する研究成果

① 3 次元球面における結び目の bounding genus の定式化

松本幸夫氏によって導入された bounding genus は，ホモロジー同境群においてとくに Rohlin 不変量の核の深さを測るホモロジー同境不変量であり，ホモロジー同境群におけるある種の距離を与える重要な不変量である．本研究では，まず有理ホモロジー 3 球面に対して，$\mathbb{Z}/16$ を媒介変数とするホモロジー同境不変量として以下のように bounding genus の一般化を与えた．有理ホモロジー 3 球面 Y とそのスピン構造 s に対して ρ を整数とするとき，(Y, s) の ρ-bounding genus $|Y, s|_\rho$ を，(Y, s) を境界にもつ連結でコンパクトなスピン 4 次元多様体 (W, t) で $\sigma(W) = \rho$ を満たすものの $b_2^+(W)$ の最小値として定める．有理ホモロジー 3 球面 (Y, s) の ρ-bounding genus の下界評価は，bounding genus を実現するスピン 4 次元多様体 W をとり，Y を境界にもつ 4 次元軌道体 X と $-W$ を Y に沿って貼り合わせて得られるスピン 4 次元閉軌道体 $X \cup_Y (-W)$ に対して 10/8 不等式を適用することにより得られる．

結び目の bounding genus は 3 次元球面上の結び目に沿った Dehn 手術の bounding genus として定義される．すなわち，K を S^3 における結び目としたとき係数 $p/q \in \mathbb{Q}$ に対するデーン手術 $K_{p/q}$ と $S^3 \setminus K$ 上のスピン構造 s および整数 ρ に対して，K の $(p/q, s, \rho)$-bounding genus を $|K|_{p/q,s,\rho} := |K_{p/q}, s|_\rho$ と定めることで結び目のコンコーダンス不変量が定義される．また，4 次元球体 B^4 に特異な 2-把手 $(D^2 \times D^2)/\mathbb{Z}_q$ を K に沿って接着して構成した 4 次元軌道体 $X_{p/q} = B^4 \cup_\varphi (D^2 \times D^2)/\mathbb{Z}_q$ に 10/8 不等式を用いることで，上正明氏の結果により結び目の bounding genus に対して以下の下界評価を得た．

定理 1 (c.f. 上)**.** S^3 における結び目 K で $S^3 \setminus K$ のスピン構造 s が K のメリディアン μ に対して $s(\mu) \equiv 0 \pmod 2$ を満たすとき，有理数 p/q に対して $\sigma(q, p, -1) \equiv -\rho \pmod{16}$ とするとき $\sigma(q, p, -1) + \rho > 0$ ならば

$$|K|_{p/q,s,\rho} \geq \frac{\sigma(q, p, -1) + 9\rho}{8} + 1 - \delta_{\mathrm{sign}(pq),1}$$

が成立する．

ただし，$\sigma(q,p,-1)$ は整数 p,q に対して定まるある有理数であり，本質的にはレンズ空間 $L(p,q)$ の Neumann-Siebenmann 不変量である．この $\sigma(q,p,-1)$ はテータ関数の対数の変換公式に由来する B. Berndt の相互法則と等価な振る舞いをする．この公式の評価は結び目の同型類に依存しないことに注意する．

また結び目に沿った p/q デーン手術 $K_{p/q}$ が Seifert 有理ホモロジー球面となる場合には，上正明氏の結果により Neumann-Siebenmann 不変量による以下の下界評価が得られる．

定理 2 (c.f. 上)**.** S^3 における結び目 K に沿った p/q デーン手術 $K_{p/q}$ が Seifert 有理ホモロジー 3 球面であるとき，$8\bar{\mu}(K_{p/q},s)\equiv\rho \pmod{16}$ かつ $8\bar{\mu}(K_{p/q},s)<\rho$ ならば

$$|K|_{p/q,s,\rho}\geq -\bar{\mu}(K_{p/q},s)+\frac{9}{8}\rho$$

が成立する．

例えば，$(2,-7)$ トーラス結び目 $T_{2,-7}$ と有理数 $5/3$ および $(T_{2,-7})_{5/3}$ 上で一意に定まるスピン構造 s に対して Neumann-Siebenmann 不変量が $8\bar{\mu}((T_{2,-7})_{5/3},s)=-16<0$ であることから，$T_{2,-7}$ の $(5/3,s,0)$-bounding genus は $|T_{2,-7}|_{5/3,s,0}\geq 2$ であることがわかる．一方で，4 球体種数 $g_4(T_{2,-7})=3$ であることから $|T_{2,-7}|_{5/3,s,0}\leq 5$ であることも松本氏による特性曲面に沿った手術を用いてわかる．

さらに特異点解消に現れる特性曲面の近傍を取り去り，徳井氏による 10/8 不等式の軌道体版を応用することで，結び目の 4 球体種数を用いた bounding genus の下界評価を得た．

結び目 K の bounding genus の他の定式化として S^3 の K に沿った巡回分岐被覆 $\Sigma_r(K)\to(S^3,K)$ と $S^3\setminus K$ 上のスピン構造 s および整数 ρ に対して，$\tilde{s}$ を s から誘導される $\Sigma_r(K)$ 上のスピン構造とするとき，$|K|_{r,s,\rho}:=|\Sigma_r(K),\tilde{s}|_\rho$ として定義することが可能であり，この研究も現在遂行中である．

② Bounding genus のスプライシング操作に関する振る舞い

Bounding genus の値は Seifert ホモロジー 3 球面の幾つかの無限系列について知られている他は未知の不変量であり，一般にその決定は容易ではなく，その手術公式も知られていない．スプライシング操作は 2 つのホモロジー 3 球面におけるそれぞれの結び目の管状近傍を取り除き，お互いのメリディアンとロンジチュードを入れ換えて貼り合わせることで新たなホモロジー 3 球面を構成する基本的な手術の一つであり，本研究では以下の定理を証明した．

定理 3. [3] $\Sigma_i=\Sigma(\Gamma_i)$ $(i=1,2)$ を鉛管型ホモロジー 3 球面とし，Σ を Σ_1 と Σ_2 をそれぞれの結び目 K_1, K_2 に沿ったスプライシングによって得られるホモロジー 3 球面とするとき，不等式

$$|\bar{\mu}(\Sigma_1)+\bar{\mu}(\Sigma_2)|\leq|\Sigma|\leq|\Sigma_1|+|\Sigma_2|+1$$

が成立する．ここで $\bar{\mu}(\Sigma_i)$ は Σ_i の Neumann-Siebenmann 不変量である．

この不等式は 2 個以上の鉛管型ホモロジー 3 球面の間のスプライシング操作に一般化され，例えば m 個の Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(2,7,13)$ のスプライシングで得られるホモロジー 3 球面 Σ の bounding genus は $m+2\leq|\Sigma|\leq 4m-1$ を満たし，m に関して一次のオーダーの挙動を示すことがわかる．証明は，L. Siebenmann によって構成された Σ_1, Σ_2 とそれらのスプライシング Σ の間の自然な同境に 4 次元軌道体による蓋をして 4 次元スピン閉軌道体上の 10/8 不等式を適用することで得られる．

(2) 3．の課題 (2) に関する研究成果

① 4 次元軌道体上のインスタントン・モジュライ空間の標準的向き

$(m,1)$ および $(m,-1)$ 型の 2 つのレンズ空間の錐の組を複数もつような負定値 4 次元軌道体に対して，位数 m の巡回群による一意化が存在することを示すには，4 次元軌道体上のインスタントン・モジュライ空間の向きを含めたより詳細な情報が必要であると考えられる．レンズ空間 $L(m,-1)$ の錐点で発生させた $1/m$ インスタントンが $L(m,1)$ の錐点でバブルを起こすことによって $U(1)$ 平坦接続が生成される．このとき $SU(2)$ 束 E はある平坦直線束 L によって直和 $E=L\oplus L^{-1}$ に分解し錐点に発生する $U(1)$ 表現は $\rho:\mathbb{Z}_m\hookrightarrow U(1)$ を標準的な表現とするとき $\rho^{\pm1}$ となることがわかる．その詳細な情報をインスタントン・モジュライ空間の向きから抽出することを考える．

本研究では，4 次元多様体上のインスタントン・モジュライ空間には「標準的な向き」が入るとする Donaldson の結果が，4 次元軌道体に対しても，以下のように blow up を用いることで成立することを証明した．4 次元閉多様体 X 上の $SU(2)$ 接続のゲージ同値類の空間 $\mathcal{B}(E)$ の向きは，$\mathcal{B}(E)$ 上の指数束 $\Lambda_E\to\mathcal{B}(E)$ の自明化であり，Donaldson によって導入された標準的な向き $o_{\mathrm{D}}(E)$ は，X のホモロジーから定まる向き α_X によって自明な $SU(2)$ 束 E 上の 0 インスタントン・モジュライ空間に定まる標準的な向き $o(\underline{\mathbb{C}}_X,\alpha_X)$ を基に S^4 上の 1 インスタントンを連結和していくことで得られる．X が局所等方群 G_p の商特異点 p をもつ 4 次元軌道体で，α を $SU(2)$ 束 E の p 上のファイバーにおける G_p の $SU(2)$ 表現とするとき，同じ特異点の型を持つ複素軌道体 Z とその上の $SU(2)$ 束 F の p における blow up $\tilde{F}$ を考えると例外曲線の近傍を錐で蓋して得られる複素軌道体 W 上の $SU(2)$ 束 H に関する指数束 $\Lambda_{(H,\alpha)}$ の向きは複素構造から定まる向き $o_{\mathrm{c}}(H,\alpha)=o_{\mathrm{Dol}}(\tilde{F})\cdot o_{\mathrm{Dol}}(F,\alpha)^{-1}$ として定まり，これは Z, F の取り方に依存せずに定まる．そこで $\Lambda_\alpha:=\Lambda_{(H,\alpha)}\otimes\Lambda^*_{(H,\theta)}$ の向き

$o_{\mathrm{c}}(\alpha) := (o_{\mathrm{c}}(H,\alpha) \cdot o_{\mathrm{c}}(H,\theta)^{-1})^{-1} = o_{\mathrm{Dol}}(F,\alpha) \cdot o_{\mathrm{Dol}}(F,\theta)^{-1}$ を定めることで，$\Lambda_{(E,\alpha)} = \Lambda_{(E,\theta)} \otimes \Lambda_\alpha$ の標準的な向きが $o(E,\alpha) := o_{\mathrm{D}}(E,\theta) \cdot o_{\mathrm{c}}(\alpha)$ と定まる．これによって，2. 研究の目的の課題 (2) に取り組むための足がかりが得られたものと考えられる．

② Seifert 有理ホモロジー 3 球面の負定値同境

筆者は，論文 [2] において，レンズ空間を境界とするある負定値 4 次元多様体 W の境界成分に $Y = L(m,1)$ があれば，$\bar{Y}$ も存在し，対 $Y \cup \bar{Y}$ は，W 上の $U(1)$ 平坦接続 $\chi : H_1(W;\mathbb{Z}) \to U(1)$ で関係していることを示した．その応用として，以下の定理が得られる．

定理 4. [4] Seifert ホモロジー 3 球面 $\Sigma(a_{k1}, \ldots, a_{kn_k})$ $(k \in \mathbb{N}, n_k \geq 3)$ の系列が $a_{k2} \cdots a_{kn_k} \equiv 1 \pmod{a_{k1}}$ かつ $a_{k1} > a_{k2} > \cdots > a_{kn_k} \geq 2$, $a_{k+1,1} > a_{k1} \cdots a_{kn_k}$ を満たすならば，それらはホモロジー同境群 θ^H_3 において一次独立である．

定理 5. [4] Seifert 有理ホモロジー 3 球面 Σ で最大の多重度を持つ特異ファイバーが $(m,1)$ 型で，その有理オイラー数が m によって定まるある可算無限個の値をとらない負の数とする．Σ がある正定値な 4 次元多様体 E の境界であり，包含写像が全射 $i_* : H_1(\Sigma;\mathbb{Z}) \to H_1(E;\mathbb{Z})$ を誘導し，かつ 2 次元相対ホモロジー群 $H_2(E,\Sigma;\mathbb{Z})$ における非自明な元の自己交叉が $1/m$ よりも大きいならば，Σ は $(m,-1)$ 型の特異ファイバーを持ち，それぞれの $H_1(E;\mathbb{Z})$ における像も位数 m となる．

Seifert ホモロジー 3 球面 Σ に対して，これを S^2 上の特異な S^1 束 $\Sigma \to S^2$ とみなし，それに付随する D^2 束 $\Sigma \times_{S^1} D^2$ を構成することで Σ を境界とする 4 次元軌道体 X が得られる．これらの定理はそれぞれ上記の同境 E の存在を仮定して，X たちと $-E$ とを Σ たちに沿って貼り合わせて負定値な 4 次元閉軌道体 $X \cup_\Sigma E$ を構成し，レンズ空間 $L(m,-1)$, $L(m,1)$ の錐特異点，およびそれらを繋ぐ $U(1)$ 平坦接続の存在定理を適用することによって得られる．技術的には，可約インスタントンの個数が偶数個であることを示す必要がある．

(3) 3．の課題 (3) に関する研究成果

① 4 次元軌道体上の 10/8-不等式による有限一意化の存在のための障害

X がスピン 4 次元閉軌道体でその特異集合 ΣX を既知としたときに，X が有限一意化可能であること，すなわちある滑らかなスピン 4 次元閉多様体 $\tilde{X}$ への有限群 G の作用による商軌道体 $\tilde{X}/G$ と同型であるための必要条件を，4 次元軌道体上の 10/8 不等式を適用して得ることができる．実際，$b_2^{\pm}(X) \leq 2$ であるとき，X の有限一意化が存在するならば，

$$\mathrm{Sign}(X) = 8|G|\delta_D(\Sigma X)$$

が成立する．ここで $\delta_D(\Sigma X)$ は X 上の Dirac 作用素の指数への特異集合 ΣX からの寄与であり，ΣX の組合せ論的な情報から計算される有理数となる．この研究は現在遂行中である．

以上，(1) では Seiberg-Witten 理論の応用として，ホモロジー 3 球面のホモロジー同境不変量である bounding genus の 4 次元軌道体上の 10/8 不等式による下界評価を用いて，①では結び目の bounding genus の定式化とその下界評価，②ではスプライシング操作に関する bounding genus の評価公式を得た．結び目の bounding genus の定式化として結び目で分岐する分岐被覆を用いる方法や，有理ホモロジー 3 球面のスプライシング操作への一般化などが課題である．一方で，bounding genus の評価は Donaldson 理論を用いて与える方法は現時点では未知である．(2) では Donaldson 理論の応用として，①ではインスタントンのバブル現象によって得られる平坦接続によって負定値な 4 次元軌道体の一意化を構成する方向性において，4 次元軌道体上のインスタントン・モジュライの標準的な向きづけについて議論をした．②ではレンズ空間の錐の対発生の応用として Seifert 有理ホモロジー 3 球面の負定値同境に関する結果を得た．この向きづけの応用として複数のレンズ空間の対発生について議論すること，および一般の球面空間型に対して一般化することが課題となる．そして，これらを Seiberg-Witten 理論によって与える方法は現時点では未知である．(3) では①にあるように Seiberg-Witten 理論の応用として 4 次元軌道体の有限一意化可能性についての障害を 10/8 不等式によって与えている．この手法では負定値 4 次元軌道体の一意化に関して Donaldson 理論における Fintushel-Stern 不変量の応用が考えられ，Seiberg-Witten 理論との比較が可能である．また，上記の複数のレンズ空間の対発生によって生ずる平坦接続を用いた負定値 4 次元軌道体の一意化の構成を議論すること，更には負定値とは限らない 4 次元軌道体について考察をすることも課題である．(1), (2), (3) の結果は Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論の双方が交錯しており，これらの統合的理解が今後の目標となる．

参考文献

[1] Y. Fukumoto, P. Kirk, J. Pinzón-Caicedo *Traceless $SU(2)$ representations of 2-stranded tangles*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 162 (1) (2017) 101–129.

[2] Y. Fukumoto, *On negative-definite cobordisms and lens spaces of type $(m,1)$ and uniformization of four-orbifolds*, Algebraic & Geometric Topology 19 (2019) 1837–1880.

[3] Y. Fukumoto, *Splicing of homology 3-spheres and bounding genus*, preprint

[4] Y. Fukumoto, *On integral homology cobordisms of Seifert fibered homology 3-spheres and negative-definite cobordisms of lens spaces of type $(m,1)$*, preprint

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Fukumoto Yoshihiro	４．巻 19
２．論文標題 On negative-definite cobordisms among lensspaces of type (m,1) and uniformization of four-orbifolds	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	６．最初と最後の頁 1837～1880
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2019.19.1837	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　6件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 福本善洋
２．発表標題 4次元軌道体のゲージ理論とその応用
３．学会等名 京都大学大学院 理学研究科 数学教室 談話会（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 福本 善洋
２．発表標題 有理ホモロジー3球面のbounding genusと結び目のコンコーダンス
３．学会等名 微分トポロジー'20（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 福本 善洋
２．発表標題 インスタントン・モジュライ空間の向きづけ可能性
３．学会等名 微分トポロジー'21（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 福本 善洋
２．発表標題 Bubbles, Orbifold metric and connections, Orienting moduli spaces
３．学会等名 勉強会 「特異インスタントンとKhovanovホモロジー」（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 福本善洋
２．発表標題 オービフォルド上のインスタントン・モジュライ空間の向きについて
３．学会等名 4-Dimensional Topology and Gauge Theory（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Yoshihiro Fukumoto
２．発表標題 Instantons and uniformization of orbifolds
３．学会等名 East Asian Conference on Gauge theory and Related topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yoshihiro FUKUMOTO Professor - 立命館大学
http://research-db.ritsumei.ac.jp/Profiles/62/0006142/prof_e.html

Yoshihiro Fukumoto's Homepage
http://www.math.ritsumei.ac.jp/~yfukumot/index.html

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関