

令和 4 年 5 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03299

研究課題名(和文) 擬アノソフ写像の複雑度と三次元多様体のファイバーの多様性

研究課題名(英文) A study of various complexities of pseudo-Anosov maps and hyperbolic fibered 3-manifolds

研究代表者

金 英子 (Kin, Eiko)

大阪大学・全学教育推進機構・教授

研究者番号：80378554

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：曲面の擬アノソフ写像類の2つの不変量(エントロピーや曲線複体に関する漸近的移動距離)に関する研究を主に行なった。

- (1) 正規エントロピーが小さい擬アノソフ組ひもの無限列の構成方を与え、それを用いて写像類群の部分群(あるいは特徴的な部分集合)の無限族に対し擬アノソフの最小エントロピーの漸近的挙動を決定した。
- (2) 固定された3次元双曲ファイバー多様体Mとそのファイバー面についてに対して、Mの擬アノソフモノドロミー全体の曲線複体に関する漸近的移動距離の上からの評価を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面の写像類群の大部分は擬アノソフ写像類である。擬アノソフ写像類の研究は力学系理論、3次元多様体論、双曲幾何学などのいくつかの分野と密接に関連する。擬アノソフ写像類の代表的な不変量(エントロピー、漸近的移動距離、写像トーラスの体積)とこれらの不変量の関係の研究は位相幾何学(特に写像類群の研究)において基本的なテーマであり、それ故に学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：We studied two invariants of pseudo-Anosov elements in the mapping class group. One is the entropy which is the translation length of the pseudo-Anosov element on the Teichmüller space. The other is the asymptotic translation length of the pseudo-Anosov element on the curve complex. (1) We gave a new construction of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies. As an application, we determine asymptotic behaviors of minimal entropies of pseudo-Anosov elements in several subgroups (or several subsets) of mapping class groups. (Joint with Hirose, and Hirose Iguchi, Koda)(2) Given a fibered 3-manifold together with the fibered face, we give a general upper bound of asymptotic translation lengths of pseudo-Anosov monodromies associated with the fibered classes in the fibered cone. (Joint with Baik, Shin and Wu)

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 擬アノソフ 組ひも群 エントロピー 曲線グラフ 漸近的移動距離

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

曲面の写像類群の元である擬アノソフ写像類の不変量として、エントロピーと漸近的移動距離がある。これらの不変量はそれぞれタイヒミュラー空間の擬アノソフによる漸近的な移動距離と曲線複体の擬アノソフによる漸近的な移動距離のことである。写像類群のタイヒミュラー空間や曲線複体への作用を考察することで、擬アノソフ写像類全体のダイナミクスに関する特徴的な性質が取り出せることが期待できる。

(1) 3次元双曲ファイバー多様体 M (ただし M の1次元ベッチ数は2以上とする)は位相型が互いに異なるファイバーを無限に許容する。ファイバーのモノドロミーは擬アノソフとなり、多様体 M 内でファイバーを動かすことにより擬アノソフの無限族が得られる。こうやって得られる擬アノソフ全体についてエントロピーと漸近的移動距離という2つの不変量を比較し、その類似性、あるいは異なる性質について調べる研究は当時、それほど盛んでなかった。エントロピーを曲面のオイラー数で正規化した正規エントロピーは、3次元多様体論の観点からも、擬アノソフの不変量として重要である。正規エントロピーはファイバー多様体のファイバー錐の上で連続的に拡張されるという著しい特徴を持つ(Fried, S. Matsumoto, McMullen)。漸近的移動距離については、類似の性質を持つ正規化漸近的移動距離というものがあるか? という問題が専門家間で提示されていた。

(2)種数 g の閉曲面の写像類群の擬アノソフ全体のエントロピーや漸近的移動距離の最小値の漸近的挙動はそれぞれ $1/g$, $1/g^2$ であることが知られている。種数 g の閉曲面の写像類群の部分群あるいは部分集合についてエントロピーや漸近的移動距離の最小値の漸近的挙動が $1/g$ や $1/g^2$ となるような部分群あるいは部分集合 H_g の例はよく知られていた。しかし漸近的挙動が $1/g$ や $1/g^2$ となる部分集合 H_g の特徴付け、あるいは組織的な構成法を与えた研究はなかった。

2. 研究の目的

曲面の写像類群の主な元である擬アノソフの不変量 (エントロピーや 曲線複体に作用する漸近的移動距離) に対して以下の課題について取り組むこと。

課題1. 写像類群の部分群(あるいは特徴的な部分集合)の無限族に対し擬アノソフの複雑度の最小値の漸近的挙動を決定する。

課題2. 固定した3次元双曲ファイバー多様体について、ファイバーの擬アノソフモノドロミー全体について擬アノソフの複雑度 (エントロピーや 漸近的移動距離) とファイバーの複雑度(ファイバーのThurstonノルム)との間の関係を調べる。特に漸近的移動距離について、ファイバー錐に関してよく振る舞う`正規化漸近的移動距離` というものが定義されるか? (エントロピーの研究では`正規化エントロピー` という量が重要な役割を果たすことがよく知られている。)

3. 研究の方法

(1)報告者は、様々な曲面の族についてエントロピーが小さい擬アノソフ写像類のサンプルを大量に持っていた。これらのサンプルは主にマジック多様体とよばれる3つのカスプを持つ双曲3次元多様体のモノドロミーから得られるものであった。これらのサンプルは「研究の目的」の課題2において数値実験を行うことができ、課題2を遂行する上で重要な役割を果たした。報告者は、過去の研究成果において、マジック多様体の全てのファイブレーションのモノドロミー、それに付随する train track map を具体的に記述していた。一方 Baik-Shin-Wu は 3次元双曲ファイバー多様体 M のファイバー面を用いて擬アノソフモノドロミーの漸近的移動距離の上から

の評価を与えていた。彼らの結果は M の1次元ベッチ数が2の場合は最良であることがわかって
いたが、 M の1次元ベッチ数が2より大きい場合にはBaik-Shin-Wu による上からの評価が最良
かどうかは本研究を実施する以前は知られていなかった。

(2) 向き付け可能な3次元閉多様体 M は二つのハンドル体の適当な貼り合わせによって得られ
る。二つのハンドル体の共通の境界をヘガード曲面といい、3次元閉多様体のこのような分解
をヘガード分解という。 M のヘガード分解のゲーリッツ群とは、 M の向きを保つ同相写像のイ
ソトピー類が成す群であって、ヘガード分解を保つもの全体が成す群である。与えられた M の
種数 g のヘガード分解について、安定化とよばれる操作により種数 $g+1, g+2, \dots$ を持つ M
のヘガード分解の列が得られるが、それに付随して M のヘガード分解のゲーリッツ群の列が得
られる。一方、3次元球面内の任意の絡み目 L には橋分解とよばれる分解がある。これは上の
ヘガード分解の3次元多様体内の絡み目における類似物である。本研究ではまず、絡み目 L の
橋分解のゲーリッツ群を導入した。橋分解の橋指数が n ならば、橋分解のゲーリッツ群は、 $2n$
個のマーク点付き球面上の写像類群の部分群を定める。与えられた絡み目 L の橋指数 n の橋
分解についても、(ヘガード分解の場合と同様に)安定化とよばれる操作により橋指数 $n+1,$
 $n+2, \dots$ を持つ L の橋分解が次々と得られるが、それに付随して絡み目 L の橋分解のゲーリ
ッツ群の列が得られる。絡み目 L ごとに定まる部分群の列の擬アノソフの最小エントロピーの
漸近的挙動を決定せよという問題は、あまり研究が進んでいない橋分解のゲーリッツ群の性質
をよく理解するためにも重要であり、かつ基本的であると考えられた。

共同研究者の廣瀬 進 氏とは、研究期間中、研究打ち合わせを年に数回行った。井口大幹氏、古
宇田悠哉氏、Baik, Shin, Wu とは、共同研究を実施していた期間中、研究打ち合わせを数回行
った。

4. 研究成果

(1) (絡み目の橋分解のゲーリッツ群の研究.) 課題 1の研究成果である。3次元球面内の自明
な結び目やホップ絡み目について、橋分解の安定化によって得られる橋分解のゲーリッツ群の
列を考察した。特にこのような(二つの)列に属す擬アノソフ元全体の最小エントロピーの漸
近的挙動を決定した。(井口大幹氏、廣瀬 進氏、古宇田悠哉氏との共同研究)

(2) (リサージュ組ひもの研究.) リサージュ曲線とは三角関数を用いて定義される平面上の
閉曲線であり、互いに素な整数 m, n によってパラメータ表示される。曲線を正規化すると、
リサージュ曲線の上の任意の点は、時刻 1 で元の位置に戻る。リサージュ曲線の上の等間隔な
3点を取り、これらの3点の曲線上の点の動きを考える。3点は互いに衝突しないことを仮定
すれば、各時刻で曲線上の3点から三角形が定まる。時間とともに、曲線上の3点から定まる
三角形は形状を変えるが、時刻 1 で元の形状の三角形に戻る。あるいは 3点の軌道から本数3
の組ひも (3次組ひも)が得られるといってもよい。本研究ではリサージュ (3次)組ひもを
Christoffel 語によって特徴づけた。リサージュ組ひもの共役類は無限個存在するが、著しい
対称性もち、(写像類群の元として)擬アノソフ型であることがわかった。リサージュ組ひもの
エントロピーと Sturn-Brocot 木の間の関係も明らかにした。(小川 裕之氏、中村 博昭氏との
共同研究)

(3) (擬アノソフの漸近的移動距離と3次元ファイバー多様体の研究.) 課題 2の研究成果であ

る. Baik-Shin-Wu は, 固定された 3 次元ファイバー多様体のモノドロミー全体の漸近的移動距離について, ある種の上からの評価を与えた. これは, ファイバー面の境界から離れたファイバークラスのモノドロミーについてのみ適用できる評価であった. 本研究ではマジック多様体のモノドロミーの無限列を適当に選ぶことにより, Baik-Shin-Wu の上からの評価が M の 1 次元ベッチ数が 3 の場合に最良であること示した. さらにマジック多様体のファイバー面の境界に収束するファイバークラスの列を適当に選ぶことにより, ファイバー錐に関してよく振る舞う `正規化漸近的移動距離' は定義できないことを示した. これは擬アノソフのもう一つの不変量であるエントロピーの性質と著しく異なる点である. (Baik-Shin-Wu との共同研究)

(4) (3次元閉多様体の2重分岐被覆の研究.) 課題 1の研究成果である. 向き付け可能な3次元閉多様体はヘガード分解を持つ. 作間 誠氏によると, 任意の向き付け可能 3 次元閉多様体 M のヘガード分解に対して, そのヘガード曲面をファイバーとする3次元ファイバー多様体 M' であって, M' は M を二重分岐被覆するものが存在する. Brooks は, このような M' として双曲的なものが取れること, すなわちモノドロミーとして擬アノソフ元がとれることを示した. Brooks の議論から M のヘガード分解を固定することに3次元ファイバー多様体であって双曲的な M' が無限に存在することがわかる. 本研究では, このような M' の擬アノソフモノドロミーのエントロピーと 3 次元多様体 M の間の関係に注目した. 2020年, 本研究では与えられた3次元多様体 M が 3 次元球面の場合, $M(=3$ 次元球面)を2重分岐被覆する3次元双曲ファイバー多様体の擬アノソフモノドロミーの最小エントロピーの漸近的挙動を決定した. 本研究の最終年度は2020年の(3次元球面に限定した)結果を発展させ, 3次元閉多様体のある無限族について最小エントロピーの漸近的挙動を決定した. (廣瀬 進氏との共同研究)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Eiko Kin, Hiroaki Nakamura, Hiroyuki Ogawa	4. 巻 --
2. 論文標題 Lissajous 3-braids	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hyungryul Baik, Eiko Kin, Hyunshik Shin, Chenxi Wu	4. 巻 --
2. 論文標題 Asymptotic translation lengths and normal generation for pseudo-Anosov monodromies of fibered 3-manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Hirose Susumu, Iguchi Daiki, Kin Eiko, Koda Yuya	4. 巻 --
2. 論文標題 Goeritz Groups of Bridge Decompositions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnab001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hirose Susumu, Kin Eiko	4. 巻 148
2. 論文標題 On hyperbolic surface bundles over the circle as branched double covers of the S^3 -sphere	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1805 ~ 1814
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14825	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Susumu, Kin Eiko	4. 巻 26
2. 論文標題 A construction of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 New York Journal of mathematics	6. 最初と最後の頁 562 ~ 597
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Braids, triangles and Lissajous curves
3. 学会等名 Topics at the Interface of Low Dimensional Group Actions and Geometric Structures (Online workshop) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Problem on minimal pseudo-Anosov entropies
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Fibered 3-manifolds and asymptotic translation length of pseudo-Anosov maps on the curve complex
3. 学会等名 Topological and probabilistic methods in low-dimensional dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Fibered 3-manifolds and asymptotic translation length of pseudo-Anosov maps on the curve complex
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー-2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Branched virtual fibering theorem and pseudo-Anosovs with small entropies
3. 学会等名 14th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Branched virtual fibering theorem and pseudo-Anosovs with small entropies
3. 学会等名 Classical and quantum three manifold topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 On Sakuma's branched virtual fibering theorem
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー-2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Pseudo-Anosov braids with small normalized entropies: construction and application
3. 学会等名 GAGTA 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 A construction of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies
3. 学会等名 Geometry and Topology of 3-manifolds workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 金 英子
2. 発表標題 Braids and fibered double branched covers of 3-manifolds
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XIII (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Eiko Kin のページ
<http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kin/>
 金 英子 research map
https://researchmap.jp/eiko_kin

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	KAIST			
米国	University of Georgia	Rutgers University	Michigan state University	