

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03300

研究課題名(和文)フラクタル幾何学研究支援ソフトウェアの開発

研究課題名(英文)Developing Research Support Software for Fractal Geometry

研究代表者

和田 昌昭(Wada, Masaaki)

大阪大学・大学院情報科学研究科・名誉教授

研究者番号：80192821

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：フラクタル幾何学研究のための可視化プログラムFractal Gazerを開発し無料で一般公開した。最新のGPUハードウェアを用いた並列処理によるフラクタル描画の高速化により、マウスによるパラメータ変更に対してフラクタル画像がどのように変化するかをリアルタイムで見ることができるようになり、フラクタル図形に対する直感的理解が格段に深まった。Fractal Gazerを用いて、これまで知られていなかった3つの相似変換による相似タイリングを多数発見することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フラクタルを描画するコンピュータプログラムは多数存在するが、そのほとんどがグラフィックデザインや娯楽的興味から作られたものであり、数学者が研究に使用できるプログラムはほとんど存在していなかった。本研究で開発したFractal Gazerはフラクタル幾何学の研究支援プログラムである。すでにFractal Gazerを用いた研究がいくつか行われており、今後さらにFractal Gazerを用いたフラクタル幾何学の研究発展が期待される。

研究成果の概要(英文)：We have developed Fractal Gazer, a visualization program for mathematicians in the field of Fractal Geometry. The program is freely available to the public. Fractal Gazer accelerates drawing of fractal images by parallel processing offered by modern GPU hardware. It enables us to modify parameters by the mouse and watch how the fractal changes shape in realtime. By using Fractal Gazer, we have discovered many new similarity tilings generated by three similarities.

Many fractal-drawing programs exist, but most of them are for graphical designs and entertainments, and very few programs exist for mathematical researches. Fractal Gazer is a research tool for mathematicians. A few researches using Fractal Gazer are already ongoing, and we expect many more researches using Fractal Gazer coming.

研究分野：フラクタル幾何学

キーワード：フラクタル幾何学 研究支援 ソフトウェア

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) フラクタル幾何学・反復関数系のような可視化が重要な役割を果たすべき分野において、プログラムというとコンピュータグラフィックスのプログラマーがデザインの興味から作成したものばかりで、数学者が研究のために自由に使える可視化プログラムが無いのは、あまりに非効率的であった。

(2) ここ数年、フラクタル幾何学・反復関数系への関心が高まって来ていることは、角大輝氏と共同で主催した「阪大力学系・フラクタルセミナー」に毎回 15~20 名が集まり、その多くが学生や若手研究者であったことからわかる。そこへ研究用可視化ソフトウェアを投入すれば、大きな発展が起きる可能性が高いと考えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、フラクタル研究用可視化プログラムを開発して一般公開し、フラクタル幾何学の分野にブレイクスルーを起こすことである。

3. 研究の方法

(1) Fractal Gazerは、研究代表者が開発中の、平面上の縮小相似変換による反復関数系の生成元のパラメータをマウスで変化させると極限集合がどのように変化するかをリアルタイムで見ることができるプログラムである。Fractal Gazerに、研究ツールとして必要な機能を付け加え、無料公開する。

(2) OPTi は研究代表者が穴開きトーラス群に関する共同研究と並行して1990年代後半から十年以上かけて開発したクライン群論および双曲幾何学のための研究用プログラムで、多くの研究者にインスピレーションを与えてきた。OPTiの開発を通じて得た、リアルタイム画像処理技術、研究者との交流、マニュアル作成、トラブル対応などあらゆる知識と経験を本研究に活かす。

(3) DeltaViewer は研究代表者が生物・医学・生理学分野における研究支援プログラムとして開発し、無料公開している3次元立体再構築プログラムである。DeltaViewerでは、GPUにおける並列処理を用いた高度なグラフィックスプログラミングを行っているが、これをFractal Gazerの開発にも活用する。

(4) 研究用に限らずコンピュータソフトウェアは作りっぱなしでは使い物にならない。ユーザからのフィードバックを受けてバグを取り除いたり、新たな機能を追加したり、OSの新しいバージョンに合わせてアップデートしたりといった地味な作業を継続して初めて使い易い枯れたソフトウェアになってゆく。Fractal Gazerも、しっかりアフターケアを行って息の長い研究用ソフトウェアに育てたい。

4. 研究成果

(1) Fractal GazerをMac App Storeを通じて無料公開し(図1)、[5]において解説した。

(2) また、Fractal Gazerのウェブサイト[1]を作成して公開した。同サイトでは、Fractal Gazerの数学的背景についてまとめたものを、Fractal Gazer Notes [2]として公開している。Fractal Gazerの機能としては、2~4つの相似変換で生成されるフラクタルのリアルタイム描画の他、タイリング、最小不変円板、コード表示、パラメータ空間などがある。とくに、パラメータ空間を高速に表示する機能は、Fractal Gazerの大きな特徴となっている。

(3) Fractal Gazer開発中に得たアイデアをもとに、Projective Hausdorff measureを定義してその基本的性質を分析し、[3],[6],[7]として発表した。

(4) Fractal Gazerを開発したことにより、これまで見つかっていなかった3つの相似変換による相似タイリングを多数発見することができた。相似タイリングとは、平面上の複数の相似変換によって生成される反復関数系であって、その極限集合 Λ が内点を持ち、各相似変換による Λ の像どうしが内点では交わらないようなものである。これまで相似タイリングに関する系統だった研究はほとんど行われていないものの、2つの相似変換によって生成される相似タイリングはさまざまな研究者によって発見されていた。3つ以上の相似変換によって生成される相似タイリングはほとんど知られていない。研究代表者は3つの相似変換の組が相似タイリングを与えるための相似比の条件を系統的に構築し、探索プログラムによって相似比の候補となる複素数の3つ組を40通り導き出した。ただし、相似比の3つ組を一つ固定したとき、実際に

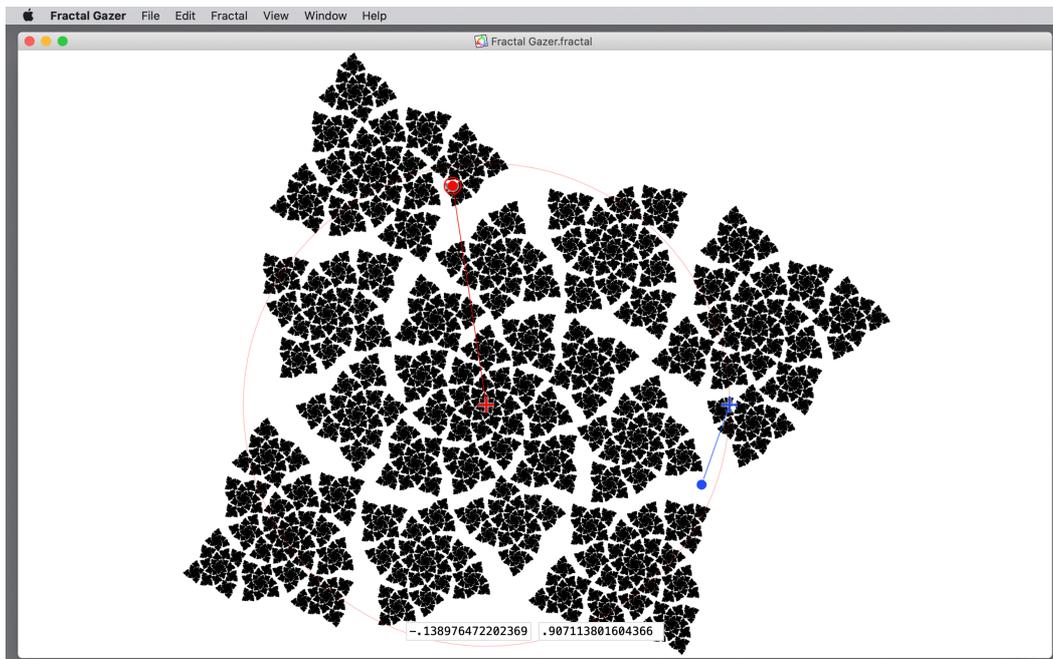


図1. Fractal Gazerのスクリーンショット

相似タイリングを与える相似の中心の組が存在するか、存在するとしてどのようなパラメータのときに相似タイリングになるかは全く非自明な問題である。代表者は、開発したFractal Gazerを駆使することにより、相似の中心となる3点の配置を多数発見し、合計300以上の3つの相似変換による相似タイリングを発見した。この結果については、[4],[8],[12]として発表した。

(5) Fractal Gazerの開発に関連して、指導学生がbox-counting次元、2つの縮小相似変換の重複度、テクスチャマッピングを用いた位置合わせ、メビウス変換によるInvariant Disk、3次元フラクタルなどの研究を行っており、[9],[10],[11],[14],[15]として発表している。

<引用文献>

- [1] Fractal Gazer, <https://mahoraga.com/FractalGazer/>
- [2] Fractal Gazer Notes, <https://mahoraga.com/FractalGazer/>
- [3] Masaaki Wada, Projective Hausdorff measure for Cantor sets (Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry), 数理解析研究所講究録 2176 (2021) 46-49.
- [4] Masaaki Wada, Tilings of the plane arising from iterated function systems generated by three similarity transformations, 数理解析研究所講究録 2217 (2022) 14-50.

<学会発表>

- [5] Masaaki Wada, Fractal Gazer - computer program for exploring fractals, Topology and Computer 2018 (2018.10.12-14, 奈良女子大学)
- [6] Masaaki Wada, Projective Hausdorff measure, Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry (2019.8.29-9.2, 京都大学数理解析研究所)
- [7] 和田昌昭, Projective Hausdorff measure, Topology and Computer 2019 (2019.10.18-20, 大阪市立大学)
- [8] 和田昌昭, 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング, トポロジーとコンピュータ2020 (2020.9.17-18, オンライン)
- [9] 池戸貴哉, ピクセル数の計測による box-counting 次元の計算, トポロジーとコンピュータ2020 (2020.9.17-18, オンライン)
- [10] 高橋龍斗, 単位区間上の2つの縮小相似変換による重複度1の区間のハウスドルフ次元の計算と理論値との比較, トポロジーとコンピュータ2020 (2020.9.17-18, オンライン)
- [11] 三宅佑, テクスチャマッピングを用いた画像の位置合わせ, トポロジーとコンピュータ2020 (2020.9.17-18, オンライン)
- [12] 和田昌昭, 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング, ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究 (2021.8.30-9.3, 京都大学数理解析研究所)
- [13] 和田昌昭, Twisted Alexander 多項式の思い出, トポロジーとコンピュータ2021 (2021.9.27-29, オンライン)
- [14] 市井翔平, メビウス変換による Invariant Disk, トポロジーとコンピュータ2021 (2021.9.27-29, オンライン)
- [15] 植野譲公, How to draw 3-D fractals, トポロジーとコンピュータ2022 (2022.10.21-23, 広島大学)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Masaaki Wada	4. 巻 2176
2. 論文標題 Projective Hausdorff measure for Cantor sets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 46-49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Wada	4. 巻 2217
2. 論文標題 Tilings of the plane arising from iterated function systems generated by three similarity transformations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 14-50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 5件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 和田昌昭
2. 発表標題 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング
3. 学会等名 ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 和田昌昭
2. 発表標題 Twisted Alexander 多項式の思い出
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2021（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 和田昌昭
2. 発表標題 2つおよび3つの相似変換による相似タイリング
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaaki Wada
2. 発表標題 Projective Hausdorff Measure
3. 学会等名 Research on the Theory of Random Dynamical Systems and Fractal Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Wada
2. 発表標題 Projective Hausdorff Measure
3. 学会等名 Topology and Computer 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Wada
2. 発表標題 Fractal Gazer - computer program for exploring fractals
3. 学会等名 Topology and Computer 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Fractal Gazer https://mahoraga.com/FractalGazer/ Fractal Gazer https://mahoraga.com/FractalGazer/
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Topology and Computer 2019	開催年 2019年～2019年
--------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------