

令和 3 年 5 月 27 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03302

研究課題名(和文)可積分測地流と関連する諸問題の研究

研究課題名(英文)Study of integrable geodesic flows and related problems

研究代表者

清原 一吉 (Kiyohara, Kazuyoshi)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：80153245

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：まず本研究の基礎であった伊藤氏との共著論文が Arnold Mathematical Journal 7, 31-90(2021) に掲載された。目的の一つはこれを非コンパクト2次超曲面に拡張することであったが、そのための方法として2次超曲面を球面の直積に射影同値に埋め込むことについては、達成された。それはユークリッド空間を球面の半分に射影同値に埋め込んだものの座標面を取ることで実現された。次にHermite-Liouville 多様体においてC-射影同値の類似の研究においてTopalov の "hierarchy" の一般化をまず示し、次に、その主張のlocalな逆命題を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可積分測地流はそれ独自への関心とともに、特異点論、射影同値など他の観点からも興味深い対象となって来ている。本研究は特に共役跡に現れる特異点の問題と、リーマン多様体の射影同値、ケーラー多様体のC射影同値、さらにはエルミート多様体のPQ射影同値に至る一連の概念について、独自の方向を示し、新たな進展をもたらすものである。

研究成果の概要(英文)：A paper with J. Itoh, which was one of the basis of this research, was published on Arnold Math. J., 31-90 (2021). One of our targets of this research was to extend it to non compact case, and we established the first step by constructing projective embeddings of hyper quadrics into products of spheres. Next, we studied the PQ equivalence of Topalov on Hermite-Liouville manifolds and gave a generalization of his "PQ-hierarchy". Moreover, we showed that a local inverse of this statement is correct, which would indicate that the notion of PQ equivalence is not so far from that of "C projective equivalence".

研究分野：微分幾何学

キーワード：可積分測地流 ハミルトン力学 共役跡 ラグランジュ特異点 射影同値 C射影同値

1. 研究開始当初の背景

可積分測地流,あるいはもっと一般に可積分なハミルトン力学系の歴史は古い。解析力学が成立した後、「保存量と還元」というメカニズムが認識されてきたが,その最も極端な場合が可積分系である。この場合問題は一次元に還元され,基本的には明示的に可解である。可積分測地流に関して言えば保存量即ち第一積分の最も簡単な例はキリングベクトル場であり,回転面の場合これによって測地線の方程式は明示的に解ける。他方,楕円体の測地流が可積分であることがJacobi以来知られており,これは一般の場合に0でないキリングベクトル場を持たない。後者の場合,既にLiouvilleにおいてその一般化の研究がなされていて,私によるLiouville多様体の研究とその複素化であるKaehler-Liouville多様体の研究につながっている。

ここでの基本的な問いは,可積分測地流を持つリーマン多様体はどのようなものか?可積分性を規定する第一積分の組はどのような特性を持つか?ということである。そうして十分な例を含むクラスが得られたら,次の課題はそれらに対して関連する諸問題を研究することである。この研究開始時点では,共役跡とカットローカスの問題,(C-)射影同値の類似物の問題,ラプシアン固有値の分布,などを主に取り上げることが適切と考えられた。

2. 研究の目的

この研究の目的は,「可積分測地流」に関わるいくつかの主要な問題に対して,明確な進展をもたらすことであった。それらは大きく4つの問題に分けられる。

(ア) 可積分測地流の理論として,豊富な例を見出し整理すること。我々はLiouville多様体とKaehler-Liouville多様体,さらにはHermite-Liouville多様体というクラスを定義し,その理論を発展させて来たが,それらは第一積分の言葉で言えば,各余接空間ごとに1次または2次の多項式であるという性質を持つ。そこで可積分測地流を持つ多様体の全体を見ると,まず各余接空間ごとに2次以下の多項式であるような第一積分によってその測地流が可積分となっている多様体を分類するというのが,現実的で興味深い問題となる。特に,Kaehler-Liouville多様体の一般的な「座標面」(実超曲面)を取れば,それはトーラス作用で保たれるが,必ずしも佐々木多様体ではない。つまりReebベクトル場は(必ずしも周期的ではない)等長作用を導くが,そのノルムは定数ではない。そこでこれらを含む,適切なクラスを設定してその「同型類」を分類することが魅力的な目標となりうる。それはトーリック佐々木多様体を含む,ある奇数次元のリーマン多様体のクラスを見出すことにつながり,同時に東の構造を通じてHermite-Liouville多様体の分類に寄与すると思われる。

(イ) 共役跡とカットローカスの問題。我々は既に論文“J. Itoh, K. Kiyohara, Manuscripta Math. 114 (2004), 247–264”において,楕円面的一般点の共役跡が丁度4つのカスプを持つという,いわゆるJacobi's last geometric statementを証明した。しかもそれら4つのカスプはその対蹠点を通る曲率線上に現れ,カットローカスはそのうちの2点を端点とする曲率線内の線分であることも示した。また,“J. Itoh, K. Kiyohara, Asian J. Math. 14 (2010), 257–290”において,その一部の結果を高次元楕円体,さらにはある種のコンパクトなLiouville多様体に拡張し,それらの多様体におけるカットローカスの構造を完全に明らかにした。また,現在投稿中の論文J. Itoh, K. Kiyohara, The structure of the conjugate locus of a general point on ellipsoids and certain Liouville manifoldsにおいて,上記の高次元の場合に共役跡内に現れる特異点集合の構造を完全に決定し,共役跡に分岐点が現れること,それはArnoldのいわゆるD4-Lagrange特異点であることを示した。

本研究ではさらに,2次超曲面を含むノンコンパクトなLiouville多様体およびそれらのコンパクトな対応物である球面の直積上のLiouville多様体の場合に,共役跡とカットローカスの構造を明らかにすることを目的の一つとした。これらはリーマン幾何において,基本的知識に属すべき事柄であるとともに,(楕円面の共役跡の4つのカスプがArnoldの興味を引いたように)特異点論の立場からも興味深い結果を与えることになるとと思われる。(I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics, University Lecture Series, 5, Amer. Math. Soc., 1994.)

(ウ) C-射影同値の類似物の問題。C-射影同値はKaehler多様体における,射影同値のある種の類似概念として最近何人かの研究者によって研究されているものである。そのLevi-Civita接続が互いに射影同値になるようなリーマン計量は一般の場合にLiouville-Staeckel型の計量になる(Levi-Civitaの結果)が,Kaehler多様体の場合に同じことをやるとtrivialなものになってしまう。そこで条件を緩めて,曲線 $c(t)$ の加速度ベクトル(Levi-Civita接続の意味で)が各点で速度ベクトル $\dot{c}(t)$ の張る1次元複素ベクトル空間に属するような曲線のクラスを考え(測地線の拡張),そのクラスを同じくする2つのKaehler計量を互いにC-射影同値という(大槻・田代による定義)。我々は既にK. Kiyohara-P. Topalov (Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 231–242)により,コンパクト性とある種の非退化性のもとで,このKaehler多様体がランク1のKaehler-Liouville多様体になり,従って複素射影空間と双正則になる,ということを示した。

この論文でも述べたように,この概念は自然にHermite多様体上に類似の(TopalovによりPQ同値と呼ばれる)概念を導く。この概念とHermite-Liouville多様体との関係を大域的に明らかにし,かつ本来のC-射影同値との関係及びHermite-Liouville多様体の分類自体との関係を明らかにする事がここでの目的である。

(エ) Liouville 多様体において、ラプラス作用素の固有値分布の構造を明らかにすること。主な手法となるのは、いわゆる半古典近似(Maslov の量子化条件または Bohr-Sommerfeld rule)とその拡張である。この手法自体は良く知られているが、我々は既に Liouville 曲面の場合に、特異な古典状態の近傍では、新しい「半古典近似」が必要であることを示し、その具体的な表示を得た(Kiyohara, Diff.Geom.App. 29 (2011) S125-S134)。その高次元版を与えることを今回の目的の一つであった。

3. 研究の方法

初めに Kaehler-Liouville 多様体の奇数次元版としてKaehler-Liouville 多様体の座標面およびその一般化を研究する。ここでの目標は(ア)で述べた例を検討して、適切な定義を与える事と、その大域的な分類になる。それは Hermite-Liouville 多様体上の $U(1)$ 束になることが期待され、従って Hermite-Liouville 多様体の分類問題と並行して研究する。射影空間を底空間とする場合の分類をまず目指す。さらに、以下の問題に順次取り掛かる。

- (1) C-射影同値の類似の問題において、Hermite-Liouville 多様体の分類と絡めて、分類の言葉で“PQ 同値”を表現する。それにより、C-射影同値との関連を明らかにする。
- (2) 2次超曲面を含む、ある種のノンコンパクトな Liouville 多様体の一般点の共役跡およびカットローカスについて、それらのコンパクトな対応物である、球面の直積上に定義されるある種の Liouville 多様体について調べることに、球面の直積への射影同値な埋め込みを調べることを通して研究する。
- (3) 球面に微分同相な Liouville 多様体について、ラプラス作用素の固有値分布の構造に対する特異半古典近似の方法を確立する。2次元の場合と同様、先ず固有値全体の集合を次元分の非負整数の組といくつかの符号によってラベル付け、これによる通常の半古典近似を記述し、それが特異 Lagrange 集合の近傍で破綻することを確認する。その後放物柱関数を使ってそこで有効な新たな半古典近似の式を与える。

これらの問題に対する代表者・分担者及び研究協力者の役割は次の通りである。代表者は上記の問題をすべて研究する。分担者の伊藤氏は上記2の問題を最小跡(カットローカス)の専門家の立場から研究する。また、彼の手法はリーマン幾何とともに組み合わせ的な幾何に基礎をおいたものであり、代表者の、どちらかという解析的な手法とは異なる立場からこの問題に取り組む。

以上の研究のため、代表者及び分担者は国内外の研究者と適宜研究連絡を行い、研究内容についての討論を行う。また関連研究集會に参加し、関連する講演を聴くと共に、出席者との意見交換を通じて、研究に有用な新知識の習得につとめる。それらのため研究経費において旅費が主要部分を占めている。また、研究遂行のため、幾何学関連図書の購入を計画している。

4. 研究成果

まず研究目的の(イ)について、投稿中であった伊藤氏との共著論文 The Structure of the Conjugate Locus of a General Point on Ellipsoids and Certain Liouville Manifolds が Arnold Mathematical Journal 7, 31–90(2021)に掲載された。アクセプトされる過程で図を2枚と concluding remarks を付け加えてこの結果の意義がさらに判り易くなったと思われる。それを受けて(イ)の目的はこれを2次超曲面に拡張することであったが、そのための方法として2に挙げた、2次超曲面を球面の直積に射影同値に埋め込むことについては、達成された。それはユークリッド空間を球面の半分に射影同値に埋め込んだものの座標面を取ることで実現され、一般化もできるが、研究半ばであるので論文にはまとめていない。一部は2019年11月の北大幾何コロキウムで講演した。

次に研究目的の(ア)と(ウ)について、Hermite-Liouville 多様体の研究、特に複素射影空間上に定義されるものの分類と、C-射影同値の類似の研究は研究の方法の1にも書いた通り、相補うものであり、この部分において一定の進展があった。即ちTopalov の“hierarchy”の一般化として定理： 複素多様体上の2つのケーラー計量 g と g' が互いにC射影同値であるとき、そこから自然に定義される(1,1) tensor A と可換な、任意の正定値でC線形な(1,1)

tensor B について、Hermite metrics g_B と g'_B は $Q=JB$ ($P=Q^{-1}$) についてPQ同値である。がまず得られるが、ここでの重要な結果として、これの逆がlocalには正しいことがわかった。即ち、次の結果が得られた。

定理： 複素次元 n の複素多様体 M 上の2つの完備Hermite計量 g と g' がPQ同値であるとし ($P=Q^{-1}$)、 A を上の通り、 M_1 を M の点で、そこで A の固有値はすべて異なり、微分が消えないもの全体のなす集合として、 M_1 は空でないとして仮定する。すると、この時次が成立する。

- (1) M_1 は M で open and dense.
- (2) 任意の M_1 の点 p について、 p のある近傍 U 上 $B=QJ$ の適当な関数倍 B_0 があって、 g_{B_0} と g'_{B_0} は

U上Kachler計量で互いにC射影同値である。

(3) (2)のUについて、 (U, g) はHermite-Liouville多様体であり、無限小正則等長変換のなすn次元の可換リー環Yを許容し、それにより、測地流は可積分である。

ここでの最終目標はこのglobal版であるが、まだそこに至っていないので、論文にはまとめていない。この結果については2019年11月の北大幾何コロキウムで発表した。さらにこれと関連して、複素射影空間上の極大トーラス作用を許容するHermite-Liouville多様体はすでに得られている「3つ組で与えられるもの」に限ることが示されれば、その中で（適当なQについて）PQ同値なHermite計量を許容するHermite-Liouville多様体は「3つ組」の言葉で明確に指定されることになり、全体の見通しが非常に良くなるが、ここまでは至っていない。

研究目標として明示はしていなかったが、本研究に関連する問題として、Zoll曲面からflag曲率一定のFinsler曲面を構成する問題があり、R. Bryant が基本的なアイデアを提出していたが、私は、Sabau氏、渋谷氏とともに、Zoll曲面が可積分測地流を持ち、測地線の様子がよくわかることを使って、回転面の場合に上記の構成の具体的な表示を得た。特に、問題のFinsler計量のパラメータによる表示式を与えた。その結果は The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution として論文の形にまとめ、Int. J. Geometric Methods in Modern Physics, vol. 16, Supp. 2 (2019) 1941003 (29 pages) DOI: 10.1142/S0219887819410032 に掲載された。この問題についてはさらに計量にとどまらず、「Zoll射影構造」からの構成が可能と思われるが、これについては具体的な進展はなかった。

また、この問題にある程度注力したため、当初の問題（エ）については具体的な進展はなかった。総じて2020年、2021年の間はコロナ禍のため研究のための出張ができず、研究が著しく停滞したことは否めない。そしてその分未使用の研究費が残ったが、致し方のないことであり、本研究はこれでひとまず終了する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|---------------------------------|
| 1. 著者名 Kiyohara Kazuyoshi、Sabau Sorin V.、Shibuya Kazuhiro | 4. 巻 16 |
| 2. 論文標題 The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 International Journal of Geometric Methods in Modern Physics | 6. 最初と最後の頁 1941003 ~ 1941003 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219887819410032 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Kazuyuki Enomoto, Jin-ichi Itoh | 4. 巻 194 |
| 2. 論文標題 The total mixed curvature of open curves in E3 | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Geometriae Dedicata | 6. 最初と最後の頁 131-140 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-017-0269-2 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Itoh Jin-ichi、Kiyohara Kazuyoshi | 4. 巻 7 |
| 2. 論文標題 The Structure of the Conjugate Locus of a General Point on Ellipsoids and Certain Liouville Manifolds | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Arnold Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 31 ~ 90 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40598-020-00153-9 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件／うち国際学会 0件）

| |
|------------------------|
| 1. 発表者名 清原一吉 |
| 2. 発表標題 射影同値と可積分測地流 |
| 3. 学会等名 北大幾何学コロキウム |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 清原一吉 |
| 2. 発表標題 射影同値のエルミート版とHermite-Liouville多様体 |
| 3. 学会等名 測地線および関連する諸問題 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Sorin Sabau, 清原一吉、渋谷一博 |
| 2. 発表標題 The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution |
| 3. 学会等名 日本数学会年会 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--------------------------|
| 1. 発表者名 伊藤仁一 |
| 2. 発表標題 多面体を裏返す |
| 3. 学会等名 第26回沼津改め静岡研究会 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 伊藤仁一 |
| 2. 発表標題 Reversing a polyhedral surface and some topics of Intuitive geometry |
| 3. 学会等名 榎本一之教授退職直前ワークショップ(東工大) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------|--|---------------------------------------|----|
| 研究 分担 者 | 伊藤 仁一 (Itoh Jin-ichi) (20193493) | 椋山女子大学・教育学部・教授 (33906) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|