

令和 3 年 6 月 3 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03303

研究課題名(和文) 組合せ論的ホップ代数の位相的モデルに関する研究

研究課題名(英文) Research on topological models for combinatorial Hopf algebras

研究代表者

中川 征樹 (Nakagawa, Masaki)

岡山大学・教育学研究科・准教授

研究者番号：50370036

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Darondeau - Pragaczによる、常コホモロジー論における旗束のGysinの公式を複素コボルディスム論へ拡張した。また、Darondeau - Pragaczにより導入された二次的Schur関数の拡張である普遍二次的Schur関数を導入し、その母関数表示やいくつかのGysinの公式を与えた。(2) 通常のHall - Littlewood多項式の拡張である普遍階乘的Hall - Littlewood P, Q-関数を導入し、複素コボルディスムにおけるGysinの公式を応用して、その母関数表示を与え、これを用いてSchur S-, Q-多項式の行列式公式やパフィアン公式の簡潔な証明を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

通常のHall - Littlewood多項式はSchur S-多項式とSchur P, Q-多項式を補間する対称多項式であり、表現論や組合せ論において重要な役割を演じるものである。本研究の特色は、これを旗束のGysin写像を通して幾何的に捉えた点にある。幾何的・位相的な観点に立つことで、形式群を利用した幾何的にも意味のある拡張が可能となった。また、Darondeau - Pragaczの公式の複素コボルディスム版を利用することにより、拡張されたHall - Littlewood関数の母関数表示が得られ、Schur S, Q-多項式等の行列式公式やパフィアン公式を統一的な方法により導出することができる。

研究成果の概要(英文)：(1) We generalized the Gysin formulas for flag bundles in the ordinary cohomology theory, which are due to Darondeau-Pragacz, to the complex cobordism theory. Then, we introduced the universal quadratic Schur functions, which are a generalization of the quadratic Schur functions introduced by Darondeau-Pragacz, and established some Gysin formulas for them as an application of our Gysin formulas. (2) We introduced a generalization of the ordinary Hall-Littlewood P- and Q-polynomials, which we called the universal factorial Hall-Littlewood P- and Q-functions, and characterized them in terms of our Gysin formulas in complex cobordism. As an application of our Gysin formulas in complex cobordism, we gave generating functions for the universal factorial Hall-Littlewood P- and Q-functions. Using our generating functions, classical determinantal and Pfaffian formulas for Schur S- and Q-polynomials, and their K-theoretic or factorial analogues can be obtained in a simple and unified manner.

研究分野：幾何学

キーワード：トポロジー 幾何 複素コボルディスム シューベルト・カルキュラス Schur S-, P, Q-関数 Hall-Littlewood関数 Gysin写像

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

トポロジーと対称関数との間には古くから密接な関係があることが知られている。最も典型的な例としては、複素ベクトル束のChern類(特性類)が挙げられるであろう。これらは、ベクトル束の分裂原理を通して、Chernルートの基本対称式で与えられる。この事実は、ホモトピー論的には、無限ユニタリー群 $U(\infty)$ の分類空間 $BU(\infty)$ のコホモロジー環 $H^*(BU(\infty))$ と対称関数のなす環 Sym との間の、整数環 \mathbb{Z} 上の可換かつ余可換なHopf代数としての同型として理解することができ、 $BU(\infty)$ のコホモロジー環 $H^*(BU(\infty))$ が、対称関数環 Sym という代数的・組合せ論に由来するHopf代数の「位相的なモデル」を与えていると見なすことができる。さらに、この対応により、Schur関数とGrassmann多様体のコホモロジーのSchubert類とが対応していることが知られている。このようにして、代数的・組合せ論の対象である Sym を、その位相的モデルである $BU(\infty)$ のコホモロジー環を利用して、幾何的・位相的な手法により研究することが可能となり、逆に、幾何的・位相的な対象である $BU(\infty)$ を、代数的・組合せ論的な手法により研究することも可能である。このような例は他にも数多く見られ、例えば準対称関数環 $Q\text{Sym}$ の構造に関するDittersの予想(1972年)が、その位相的モデルを利用したトポロジーの手法を用いて証明されたことは記憶に新しい(Baker - Richter (2008年))。研究代表者である中川は、研究分担者である成瀬弘氏との共同研究の中で、古典的なSchur多項式について知られている種々の結果が、常コホモロジー論(これは加法的形式群に対応する)に対応するものであるという視点に立ち、これを、より一般の「複素向け付け可能な一般コホモロジー論」、取り分け「普遍性」をもつ複素コボルディズム論(これは普遍形式群に対応する)へ拡張することを試み、通常のSchur S, P, Q -関数の「普遍版」である「普遍階乗的Schur S, P, Q -関数」を導入して、これらを用いて無限シンプレクティック群や無限特殊直交群上のループ空間の、複素向き付け可能な一般(コ)ホモロジーの記述を与えた。

2. 研究の目的

代数学・表現論・組合せ論において重要な研究対象であるHopf代数は、その起源を、1940年代のHopfによるリー群のコホモロジーの研究、1950年代のSerreによるH-空間の研究といったトポロジーにもつ。しかしながら、代数学・組合せ論といった代数的な視点と幾何学・トポロジーといった幾何的な視点の双方を見据えた研究が積極的になされてきたとは言いがたい。例えば、代数学・組合せ論で重要な研究対象である対称関数環 Sym は \mathbb{Z} 上の可換かつ余可換なHopf代数の構造をもつ。一方、トポロジーで重要な研究対象である無限ユニタリー群の分類空間はH-空間の構造をもち、その整数係数コホモロジー環 $H^*(BU(\infty))$ はHopf代数として Sym と同型である。この事実は古くから知られているが、このことを積極的・本質的に利用した研究はそれ程多くはないと思われる。本研究の目的は、代数学・組合せ論に登場する様々な「(組合せ論的) Hopf代数」(例 Sym) に対して、その「位相的モデル」(例 $H^*(BU(\infty))$) を与え、組合せ論とトポロジー双方の手法を活用して、それらの構造を解明することである。

3. 研究の方法

通常のHall - Littlewood多項式を、ベクトル束に付随する旗束の射影から誘導される、コホモロジーのGysin写像を通して幾何的に捉えることにより、幾何的・位相的な手法が適用できる。例えば、通常のコホモロジー論が加法的形式群に対応する一般コホモロジー論の一つであるこ

とに着目すると、より一般の形式群、中でも乗法的形式群や普遍形式群に対して、それぞれ対応するコホモロジー論であるK-理論や複素コボルディズム論の中でHall - Littlewood多項式の拡張を考えることができる。また、Gysin 写像の記述には、Becker - Gottlieb のトランスファー(移送準同型)などトポロジーの手法を利用することができる。さらには、代数学や組合せ論で研究されている重要な Hopf 代数である対称関数環 Sym には、その位相的モデルとして、 $BU(\)$ のコホモロジー環を取ることができ、この他、非可換対称関数環 NSym や準対称関数環 QSym 等も、空間の(コ)ホモロジーとして実現できることが知られており、このような位相的モデルを通して、幾何的・位相的手法を用いて、これらの Hopf 代数を研究することが可能となる。

4 . 研究成果

(1) Darondeau - Pragaczによる、複素ベクトル束(A, B, C, D型)に付随する旗束のGysinの公式(常コホモロジー論の場合)を、一般コホモロジー論、その中でも普遍性をもつ複素コボルディズム論へ拡張することができた。また、Darondeau - Pragaczが導入した「二次的Schur関数」の複素コボルディズム版である「普遍二次的Schur関数」を導入し、その基本的な性質を調べ、Pragacz - Ratajskiの公式の複素コボルディズム版を得た。さらには、普遍形式群を乗法的形式群に特殊化することにより、「K-理論二次的Schur関数」を導入し、Darondeau - Pragaczの公式のK-理論版を利用することにより、その行列式公式を得ることができた。これらの結果をまとめた論文「Darondeau--Pragacz formulas in complex cobordism」(arXiv:1910.03649)は雑誌Mathematische Annalenへ掲載される予定である。

(2) Hall - Littlewood多項式の「普遍かつ階乗版」である「普遍階乗的Hall - Littlewood P, Q-関数」を導入し、複素コボルディズム論におけるDarondeau - Pragaczの公式を利用することにより、その母関数表示を得ることができた。母関数表示を利用することにより、Schur多項式、Grothendieck多項式の行列式公式、およびSchur Q-多項式、K-理論的Schur Q-多項式のパフィアン(Paffian)公式等を統一的方法で求めることができる。さらに、「双対Grothendieck多項式」の母関数表示および「双対K-理論的Schur P-, Q-関数」の母関数表示の予想式を立てることができた。これらの結果は、論文「Generating functions for the universal factorial Hall--Littlewood P- and Q-functions」(arXiv:1705.04791)にまとめられている(現在、投稿中)。

(3) これらの研究を進める過程で、ベクトル束に付随する旗束に関連する Gysin の公式とその具体的な表示である Darondeau - Pragacz の公式、トーラス同変コホモロジー論における Atiyah - Bott - Berline - Vergne の公式と、それを留数で表示する留数公式の関係を調べ、K-理論の場合の予想式を立てることができた。その特別な場合として、Buch による 1 行の分割に対する Grothendieck 多項式の表示が直ちに得られる。また、これと関連して、Schur 関数についての Gustafson - Milne 型の等式、Chen - Louck の補間公式、Hiep の公式、Feher - Nemethi - Rimanyi の公式、Grothendieck 多項式についての Guo - Sun の公式について調べ、これらが複素コボルディズムにおける Darondeau - Pragacz の公式から統一的に導かれることを確認した。さらに、これら一連の Gysin の公式は、トーラス同変コホモロジーにおける Atiyah - Bott - Berline - Vergne の公式や Bott の留数公式、さらには Zielenkiewicz, Weber - Zielenkiewicz, Allman - Rimanyi, Rimanyi - Szenes による多重留数公式などと密接に関連しており、相互の関係を明ら

かにする必要があるが、これに関して部分的な結果を得ている。さらには、多様体の特性数の計算への応用についてもいくつか考察を進めた。

(4) 等質空間のコホモロジーに関連する研究も継続し、西本哲氏の協力を得て、いわゆる Rosenfeld 平面の一つである例外型既約対称空間 EVI の 8 次 Stiefel - Whitney 類が 0 でないことを示し、 EVI が (R. Hoekzema の意味で) 4-向き付け可能でないことを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Masaki Kameko, Masaki Nakagawa, and Tetsu Nishimoto	4. 巻 95
2. 論文標題 On the mod 2 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E ₆	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 91, 95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.95.91	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masaki Nakagawa and Hiroshi Naruse	4. 巻 708
2. 論文標題 Universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 201--244
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/708/14627	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 中川 征樹
2. 発表標題 Higher orientability of the Rosenfeld planes
3. 学会等名 香川セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaki Nakagawa
2. 発表標題 Gysin formulas for generalized Hall-Littlewood functions and related topics
3. 学会等名 New interactions between Geometry and Combinatorics (幾何学と組合せ論の新しい融合) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中川 征樹, 成瀬 弘
2. 発表標題 複素コボルディズムにおけるDarondeau-Pragaczの公式
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	成瀬 弘 (Naruse Hiroshi) (20172596)	山梨大学・大学院総合研究部・教授 (13501)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------