

令和 5 年 5 月 8 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03306

研究課題名（和文）2次元滑らか結び目解け予想の解決

研究課題名（英文）Solving the smooth unknotting conjecture in dimension four

研究代表者

松本 堯生（Matumoto, Takao）

大阪公立大学・数学研究所・特別研究員

研究者番号：50025467

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：2次元滑らか結び目の解け予想を、2次元ブレイドの1助変数族を用いて解決を試みた。この予想自体の解決には至らなかったが、チャートと呼ばれる2次元ブレイドを表す図式の1助変数族において、4次元での交点に対応するノードが高々1個現れ、その軌跡がある程度単純であれば、ノードを持たない1助変数族が存在することがわかった。関連して、互換の有限列の間に半順序を導入した。これは2次元ブレイドのフィンガームーブと呼ばれる重要な変形に関係している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元滑らか結び目の解け予想は、4次元空間の中に埋め込まれた球面に関する予想であり、微分トポロジーにおける重要な問題の一つである。4次元空間の中に埋め込まれた球面などの曲面は2次元ブレイドと呼ばれるとても良い形状に変形できることが知られており、2次元ブレイドを平面上の図式で表したものがチャートである。今回得られたチャートの変形に関する研究成果は、今後の4次元空間の中に埋め込まれた曲面の研究などに有用となりうる。

研究成果の概要（英文）：We attempted to prove the smooth unknotting conjecture in dimension four by using the idea of 1-parameter family of 2-dimensional braids. Although we have not succeeded with the conjecture itself, we have shown that under a certain condition, if two charts presenting 2-dimensional braids are related by a one-parameter family of charts possibly with at most one node then they are related by another one without node. We also introduced a partial order on finite sequences of transpositions, which is related to finger moves on 2-dimensional braids.

研究分野：トポロジー

キーワード：トポロジー 2次元結び目 2次元ブレイド チャート図の変形 マルコフ型定理 4次元トポロジー

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

微分トポロジーは一般化されたポアンカレ予想等で1960年代に華々しく幕を開け、結び目理論もほぼ同時期にデーブ補題の証明が与えられ発展した。さらに、 $(n-2)$ 次元球面の n 次元球面への局所平坦な埋め込みは補空間が円周とホモトピー型が等しければ $n=4$ 以外で自明な埋め込みと同相であり、微分可能な埋め込みなら微分同相であることも証明された。1980年代にはフリードマンとドナルドソン等によって4次元多様体の研究が著しく進み、4次元位相ポアンカレ予想および2次元球面の4次元球面への局所平坦な埋め込みの位相的結び目解け予想は解決されている。しかしながら、4次元可微分多様体の研究は、ゲージ理論ばかりでなく古典結び目の新たな不変量構成にも刺激され、国内外とも不変量によって微分構造を区別する方向に向かい、4次元ホモトピー球面が4次元球面と微分同相であるかという「4次元滑らかポアンカレ予想」および2次元球面が4次元空間に滑らかに埋め込まれ補空間の基本群が無限巡回群のとき自明な埋め込みに微分同相であるかという「2次元滑らか結び目解け予想」の二つの予想は依然として未解決のままである。さらに、ペレルマンによってサーストンの幾何化予想ひいては3次元ポアンカレ予想が解かれたので、古典的な微分トポロジーの未解決問題は上の二つになってしまったのである。

2. 研究の目的

古典的微分トポロジーの2大未解決問題の一つである「2次元滑らか結び目解け予想」を解決することが第1目的である。さらにそれを発展させ、数学史を含む数学研究環境を良くすることに貢献したい。

予想を2次元ブレイドの1助変数族に関する問題に翻訳し、予想を特別な場合に帰着させること、帰着された問題の具体的な解析方法を与えることは重要であり、それによって目的が達成できると考えている。

3. 研究の方法

2次元滑らか結び目の解け予想解決の出発点は、カスプによる2重点の生成と消滅のみを許した球面からの写像の1助変数族を構成したことである。この1助変数族を2次元ブレイドの1助変数族に変換することはマルコフの定理であって、研究分担者鎌田聖一氏の手法を交点がある場合に拡張すればよい。また、交点は動かないとしてマルコフ定理を適用するので、最後のカスプに対応するチャートでの変形つまりノードと端点の融合は別途強制的に行う。このことによって、交点が2個以上ある場合に、2重点の逆像が2次元球面と区間の直積の中で絡まることは自然に避けられるのである。

さて、最も簡単なチャートは n 本の向きのついた線分のそれぞれに1から n までのラベルがついたものであり、これを自明なチャートと呼ぶ。2次元ブレイドとしては $n+1$ 枚からなり、それぞれの線分の端点は指数2の分岐を表している。また、自明なチャートは自明な2次元結び目を表す。さて与えられた2次元結び目もアレクサンダーの定理により、2次元ブレイド従ってチャートで表され、上で述べたようにこの二つは特異2次元ブレイドつまり線分上に4次元空間内の交点を表すノードを持つかも知れないチャートの1助変数族でつながる。チャートは端点とノード以外に、ブレイド関係式に対応して3つの線分が1点で交わる白頂点とラベルの差が2以上の2線分が交わる交点を持っている可能性がある。また、単純でないチャートの1助変数族とは、安定化で新しく現れる線分の端点が他の既にある端点にくっつくこと及びその逆を途中で許すことである。このような場合を込めて、まず途中でブレイドの枚数が変わらないように、枚数を増やして全体の安定化を図る。さらに部分的な安定化をしながら、うまく高さ関数を調整するとなんと交点数が1で途中は全て単純なチャートの1助変数族が分離できるのである。

我々はチャートの1助変数族を円柱の中の特別な曲面族として見ているので、この操作はきちんと立体図で書ける。分離した交点数1の部分は、自明なチャートからの変化をブレイド群の生成元の語の変化で記述することができる。さらに、本質的には語の関係式の数による帰納法によって、もう一方も自明なチャートになることを示すことができるはずである。最後は、交点数に関する帰納法で二つの結び目はイソトピックになる。

4. 研究成果

2次元滑らか結び目の解け予想を、2次元ブレイドの1助変数族を用いて解決を試みた。ある2次元ブレイドのチャートが、ノードが高々1個現れるような広義チャートの1助変数族で自明なチャートと結ばれる時、それらはノードを伴わないチャートの1助変数族で結ばれるであろうという予想が、2次元滑らか結び目の解け予想の本質であり、この予想はノードの通過する軌跡がある程度単純な時には成り立つことが確認できた。研究分担者の鎌田はこの予想に関連して、ブレイドシステムと呼ばれるブレイド語の列で現した時にノードの通過がもたらす交差情報の変化とチャートの取り替えに関する議論を展開した。予想自体の解決には至らなかったが、 n 次対称群における互換の有限列に半順序関係を導入した。この半順序は2次元ブレイドをフィンガームーブとその逆操作で変形していく時のチャートの変化に密接に関係する2次元ブレイドの新しい研究対象で興味深い概念である。鎌田はJ Scott Carterとこの半順序について研究を始めたが、その後R. Piergallini、D. Zuddasなども関心を示し、研究を継続中である。この半順序は最小元が存在すると思われ、 n が3および4の時には最小元が存在が確認できた。今後この議論を発展させ、上述のチャートに関する予想の解決に繋がることが期待される。また、H自明絡み目のモーション群に関する研究成果（成分数が少ない時に群表示の厳密な証明を与えた）や4次元空間にはめ込まれた曲面の図式表示も関連して得られた。この研究期間の途中で、第三者により2次元滑らか結び目の解け予想解決を主張するプレプリントが発表された。アイデアに直交2ハンドル組という概念が使われており、我々の議論との関連性を調査したが、直接的な関係は見出すことはできなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Kamada Seiichi	4. 巻 301
2. 論文標題 Tensor products of quandles and 1-handles attached to surface-links	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107520	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 BODE Benjamin, KAMADA Seiichi	4. 巻 73
2. 論文標題 Knotted surfaces as vanishing sets of polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1289-1322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84618461	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Tomotada Ohtsuki, Toshie Takata	4. 巻 370
2. 論文標題 On the quantum $SU(2)$ invariant at $q = \exp(4\pi i \sqrt{-1}/N)$ and the twisted Reidemeister torsion for some closed 3-manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commun. Math. Phys	6. 最初と最後の頁 151-204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03489-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kamada Seiichi, Kawachi Akio, Kim Jieon, Lee Sang Youl	4. 巻 27
2. 論文標題 Presentation of immersed surface-links by marked graph diagrams	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216518500529	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kamada Seiichi, Kawachi Akio, Kim Jieon, Lee Sang Youl	4. 巻 27
2. 論文標題 Biquandle cohomology and state-sum invariants of links and surface-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216518430162	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Graphic descriptions of topological objects, I
3. 学会等名 Singularity theory and geometric topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Graphic descriptions of topological objects, II
3. 学会等名 Singularity theory and geometric topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鎌田聖一
2. 発表標題 曲面のブレイドと結び目について
3. 学会等名 研究集会「結び目理論」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Braids, I
3. 学会等名 Knots through web ICTS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Braids, II
3. 学会等名 Knots through web ICTS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 The motion group and the ring group of an H-trivial link and its application
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Motions and their actions on the fundamental groups and quandles of H-trivial links
3. 学会等名 AMS Joint Mathematics Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 Tensor products of quandles and classification of 1-handles attaching to surface-links
3. 学会等名 Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichi Kamada
2. 発表標題 On surfaces immersed in 4-space
3. 学会等名 4-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 J. Scott Carter, Seiichi Kamada	4. 発行年 2022年
2. 出版社 American Mathematical Society	5. 総ページ数 365
3. 書名 Diagrammatic Algebra	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	鎌田 聖一 (Kamada Seiichi) (60254380)	大阪大学・大学院理学研究科・教授 (14401)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	大槻 知忠 (Ohtsuki Tomotada) (50223871)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Four Dimensional Topology	開催年 2018年～2018年
-------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------