

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03308

研究課題名（和文）写像類群のジョンソン準同型をめぐる研究：曲面上の1次元の対象を用いたアプローチ

研究課題名（英文）A study on the Johnson homomorphism for the mapping class group: an approach using one-dimensional objects on surfaces

研究代表者

久野 雄介 (Kuno, Yusuke)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：80632760

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：写像類群の代数構造を曲面上の1次元の対象を用いて解明するという方針によって研究した。特に、写像類群の代数構造を逐次的に調べるための重要な手段であるジョンソン準同型の理論に関連して、曲面上の閉曲線の代数的な性質と3次元トポロジーを関係付ける結果や、曲面に埋め込まれたファットグラフの数値的不変量の明示公式を得た。また、曲面上の閉曲線の交差や自己交差の代数構造とリー理論に由来する柏原-ヴェルニュ方程式の関連について、以前得た結果を改良した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

写像類群の自然な拡張として、3次元ホモロジー同境のなすモノイドがあり、どちらも低次元トポロジーにおいて重要な役割を果たしている。一般デーンツイストの幾何学的解釈を与えた結果により、両者の差異を具体的かつ概念的に明瞭な形に示せた。柏原-ヴェルニュ方程式は結合子など他分野の対象とも密接に関わり、多くの研究者から興味を持たれている。本研究の成果によって柏原-ヴェルニュ方程式と曲面のトポロジーとの関連がさらに強化されたことは、関連分野の発展にも寄与するものと考えている。

研究成果の概要（英文）：The main theme of this research project is to study the algebraic structure of the mapping class group using one-dimensional objects on surfaces. In particular, in connection with the theory of the Johnson homomorphism, we obtain results on the relationship between the algebraic properties of loops on surfaces and the three-dimensional topology, and an explicit formula for some numerical invariant for fatgraph spines. Also, we have improved previous results on the relationship between the topology of loops on surfaces and the Kashiwara-Vergne equation.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 ジョンソン準同型

1. 研究開始当初の背景

曲面の写像類群の研究において、曲面上の 1 次元の対象に着目することは基本的な研究手段として用いられてきた。こうした中、代表者は曲面上の自己交差を持つ曲線に対するある代数的構成(一般デーンツイスト)や、曲面に埋め込まれたファットグラフの数値的不変量の研究を行ってきた。これらの対象は、どちらも写像類群の代数構造を逐次的に調べるために導入されたジョンソン準同型の理論に関係している。また、曲面上の閉曲線の交差や自己交差の代数構造(ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数)について、その形式性と呼ばれる代数的性質がリー理論に由来する柏原-ヴェルニュ問題と関連していることが明らかにされていた。その中で中心的な考察の対象となる柏原-ヴェルニュ方程式を曲面のトポロジーから理解するために、更なる研究が必要とされていた。

2. 研究の目的

一般デーンツイストについてはその幾何的な解釈を与えることが課題であり、ファットグラフの数値的不変量については基本的性質の解明や変種の研究が課題となっていた。また、ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式性と柏原-ヴェルニュ方程式の解について、以前の研究結果により後者から前者が導かれることが判明していたが、その逆の主張が成り立つかどうか大きな課題として残されていた。本研究では、これらの曲面上の 1 次元の対象の研究を通じて、写像類群のジョンソン準同型の理論を新しい段階に展開し、深めることを目指した。

3. 研究の方法

(1)G. マシュヨー氏(ブルゴーニュ大学)、辻俊輔氏(京都大学/明治大学)と研究協力をを行い、一般デーンツイストの 3 次元トポロジーにおける解釈について研究を行った。マシュヨー氏との共同研究では、3 次元のホモロジーシリンダーに着目して研究を行った。さらに辻氏の協力を得て一般デーンツイストに関する総合的な研究を実施し、もともとの構成だけでなく種々のスケイン代数を用いた量子トポロジーの枠組みでの変種・精密化についても考察を行った。

(2)大学院生の竹澤花恵氏(津田塾大学)との研究協力をを行い、ファットグラフ複体のペナーのコサイクルに関するファットグラフの数値的不変量の研究を行った。

(3)河澄響矢氏(東京大学)、A. アレクシーブ氏(ジュネーブ大学)、F. ネフ氏(ダブリン大学トリニティ・カレッジ)と研究協力をを行い、ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式性と柏原-ヴェルニュ方程式の関係について研究した。コロナ禍のために研究交流が困難な時期があったが、期間延長をした 2022 年度にはアレクシーブ氏、ネフ氏と直接会って議論を行い、研究を進展させることができた。

上記(1)(2)(3)のどの段階においても、写像類群のジョンソン準同型への応用を念頭におきながら研究を進めた。特に、(1)ではホモロジーシリンダーに対するジョンソン準同型の具体的な計算や写像類群との比較を強く意識して研究を行った。

4. 研究成果

(1) 一般デーンツイストの 3 次元トポロジーからの解釈について。マシュヨー氏と共同研究を行い、ホモロジーシリンダーと呼ばれるある 3 次元多様体を曲面上の閉曲線から構成すると、その閉曲線に沿う一般デーンツイストの良い近似を与えることを証明した。また、副産物として、ホモロジーシリンダーに対するジョンソン準同型の全射性に対する別証明が得られた。続いて、マシュヨー氏、辻氏と一般デーンツイストに関する概説論文を共同執筆した。特に、量子トポロジーの枠組みで辻氏が導入したスケイン代数による様々な変種・精密化について基本的な構成を解説した。

(2) 3 価ファットグラフスパインの数値的不変量について。竹澤氏と共同研究を行い、ペナーのコサイクルに関する二次不変量の明示公式を得た。以前の代表者の研究で取り扱った別のコサイクルに対する二次不変量よりも係数が複雑であるが、結果の公式は簡明なものとなった。この研究の副産物として、3 価ファットグラフスパインを用いた、曲面のシンプレクティック形式の組み合わせ的表示公式を得た。

(3) ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式性と柏原-ヴェルニュ方程式について。河澄氏、アレクシーブ氏、ネフ氏と共同研究を行い、ゴールドマン括弧積の形式性が曲面群の群的マグナス展開の境界条件を導くことを証明した。完備テンソル代数において曲面の境界に対応する元を特徴付けるためのある代数的主張が鍵となっている。応用として、ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式性を導く様な群的マグナス展開が柏原-ヴェルニュ方程式の解集合と一対一に対応していることを示した。また、高種数の柏原-ヴェルニュ問題とゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式性について以前執筆した論文の改訂作業を行い、主結果の改良を行った。特に、論文の中で重要な役割を果たす非可換発散コサイクルとその積分コサイクルの諸性質について、以前よりも直接的で概念的に優れていると思われる

議論によって基礎部分を確立することができた。

- (4) その他の結果。榎本直也氏(電気通信大学)、佐藤隆夫氏(東京理科大学)との研究協力により、写像類群のジョンソン準同型の全射性の障害に関して、トゥラエフ余括弧積とそのフレーミング版から生じる二つの障害の差を研究した。特に、差の具体例をシンプレクティック群の既約表現として特定した。佐藤正寿氏(東京電機大学)との研究協力により、ハンドル体の写像トーラスとして得られる4次元多様体のトポロジー、特に符号数について研究した。特に、ハンドル体写像類群の上で符号数コサイクルのコホモロジー類が消滅することに付随したある2次不変量の明示的公式を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yusuke Kuno, Kae Takezawa	4. 巻 312
2. 論文標題 A note on Penner's cocycle on the fatgraph complex	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 108063
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2022.108063	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuno Yusuke, Massuyeau Gwenael	4. 巻 21
2. 論文標題 Generalized Dehn twists on surfaces and homology cylinders	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 697 ~ 754
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2021.21.697	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 KUNO Yusuke, SATO Masatoshi	4. 巻 44
2. 論文標題 The Meyer function on the handlebody group	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 TURKISH JOURNAL OF MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 1520 ~ 1533
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3906/mat-1911-67	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Alekseev Anton, Kawazumi Nariya, Kuno Yusuke, Naef Florian	4. 巻 11
2. 論文標題 Goldman-Turaev formality implies Kashiwara-Vergne	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 657 ~ 689
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/143	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoya Enomoto, Yusuke Kuno, Takao Satoh	4. 巻 271
2. 論文標題 A comparison of classes in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107052
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.107052	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinji Fukuhara, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno	4. 巻 55
2. 論文標題 Self-intersections of curves on a surface and Bernoulli numbers	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 761-768
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 久野雄介
2. 発表標題 ファットグラフ複体のPennerのコサイクルについて
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会、北海道大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久野雄介
2. 発表標題 ファットグラフ複体のPennerのコサイクルについて
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学(オンライン)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Extensions of 1-cocycles on the mapping class group to the Ptolemy groupoid
3. 学会等名 Algebra, Topology and the Grothendieck-Teichmüller group (SwissMAP Research Station in Les Diablerets, Switzerland) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 河澄響矢、久野雄介
2. 発表標題 写像類群のリー代数を求めて
3. 学会等名 日本数学会幾何学賞受賞特別講演 (オンライン) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Generalized Dehn twists and homology cylinders
3. 学会等名 Topics at the Interface of Low Dimensional Group Actions and Geometric Structures, National University of Singapore (online workshop) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Generalized Dehn twists on surfaces and homology cylinders
3. 学会等名 Workshop: Johnson homomorphisms and related topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Symplectic/special expansions for surfaces
3. 学会等名 Workshop: Expansions, Lie algebras, and Invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 The geometric Johnson homomorphism and "good" symplectic expansions
3. 学会等名 低次元トポロジー in 白神 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 On spin structures associated with a trivalent fatgraph spine
3. 学会等名 Workshp: Super-Riemann surfaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and its applications (1)(2)
3. 学会等名 Interactions between algebra and geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem
3. 学会等名 Poisson geometry of moduli spaces, associators and quantum field theory, Simons Center for Geometry and Physics (USA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem
3. 学会等名 102e rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens, IRMA, University of Strasbourg (France) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Goldman-Turaev Lie双代数の形式性と柏原-Vergne問題
3. 学会等名 Poisson幾何とその周辺, 東京理科大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Kuno
2. 発表標題 Generalized Dehn twists on surfaces and homology cylinders
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Athanasios Papadopoulos (Editor)	4. 発行年 2021年
2. 出版社 European Mathematical Society	5. 総ページ数 698
3. 書名 Topology and Geometry, A Collection of Essays Dedicated to Vladimir G. Turaev (分担執筆, Chapter 18 を G. Massuyeau氏、辻俊輔氏と共同担当)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	マシュヨー グエナエル (Massuyeau Gwenael)		
研究協力者	辻 俊輔 (Tsuj i Shunsuke)		
研究協力者	竹澤 花恵 (Takezawa Kae)		
研究協力者	河澄 響矢 (Kawazumi Nariya)		
研究協力者	アレクシーブ アントン (Alekseev Anton)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ネフ フローリアン (Naef Florian)		
研究協力者	榎本 直也 (Enomoto Naoya)		
研究協力者	佐藤 隆夫 (Satoh Takao)		
研究協力者	佐藤 正寿 (Sato Masatoshi)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	ブルゴーニュ大学			
スイス	ジュネーブ大学			
デンマーク	コペンハーゲン大学			
アイルランド	ダブリン大学トリニティ・カレッジ			
米国	MIT			