様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　５ 月 ２７ 日現在

機関番号：３２６６０

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：１８Ｋ０３３１１

研究課題名（和文）対称空間内の部分多様体及びその様々な曲率流に沿う時間発展の研究

研究課題名（英文）Research of submanifolds in symmetric spaces and their time evolution along various curvature flows

研究代表者

小池　直之（Koike, Naoyuki）

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授

研究者番号：００２８１４１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：主な研究成果は，以下の通りである。１つは，非コンパクト型対称空間内の等径部分多様体で鏡映的な焦部分多様体を許容するものに対する等質性定理を，複素化と無限次元空間への線形化を利用して証明したことである。２つ目は、ある種のヒルベルトリー群作用を備えたヒルベルト空間内の(その作用に関して)不変な正則化された平均曲率流に関するある種の崩壊定理を証明し，その定理をゲージ理論へ応用するための土台となる事実を示したことである。３つ目は，コンパクト型対称空間の複素化上のカラビ・ヤウ構造の構成法，及び，そのカラビ・ヤウ多様体内の特殊ラグランジュ部分多様体の構成法に関する研究を推進させたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題における研究成果は，微分幾何学の見地から，ゲージ理論や超対称性理論をはじめとする理論物理学を研究する上で，重要な結果になるのではないかと考えている。特に，研究成果の一つである正則化された平均曲率流の研究をゲージ理論へ応用するために土台となる理論の構築は，今後，注目されるのではないかと考えている。

研究成果の概要（英文）：Main research results in this research subject are as follows. First, we proved the homogeneity theorem for isoparametric submanifolds in a symmetric spaces of non-compact type admitting a reflective focal submanifold by using the complexification and the linearization to an infinite dimensional Hilbert space.
Secondly we proved a certain kind of collapsing theorem for the invariant regularized mean curvature flow in a Hilbert space equipped with a certain kind of Hilbert Lie group action and made the theory based to apply the collapsing theorem to the Gauge theory. Thirdly we gave a construction of Calabi-Yau structures on the complexification of a symmetric space of compact type and a construction of special Lagrangian submanifolds in the Calabi-Yau manifold.

研究分野：微分幾何学

キーワード：平均曲率流　対称空間　等径部分多様体　複素等焦部分多様体　固有フレッドホルム部分多様体　ゲージ理論　カラビ・ヤウ構造　特殊ラグランジュ部分多様体

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

幾何学における研究対象であるリーマン多様体(等)の姿を捉えるためには，そのリーマン多様体をより次元の高い比較的シンプルな空間(ユークリッド空間をはじめとする対称空間等)内に(等長的に)はめ込んで、その次元の高い空間内の部分多様体として，眺める必要がある。このように、部分多様体論は、幾何学を視覚的に研究する上で、基本となる理論である。様々な良い性質をもつ部分多様体のモデルは、外の次元の高い空間へのリー群作用の軌道として与えられる。このように、リー群作用の軌道理論は、部分多様体論において必要不可欠な理論である。また、様々な良い性質をもつ部分多様体の存在性を示したり，その位相を調べたりするために、幾何解析学における平均曲率流をはじめとする曲率流は、強力な武器となる。対称空間内の部分多様体の研究は、1995 年ぐらいから、E. Heintze, R. S. Palais, C. L. Terng と G. Thorbergsson によって本格的に始められた。この研究では、対称空間へのリー群作用や対称空間へのリーマン沈め込み写像による無限次元ヒルベルト空間へのリフト，さらに部分多様体の複素化やその複素化の擬ヒルベルト空間へのリフトが用いられる。ここで，複素化の擬ヒルベルト空間へのリフトを利用した研究は，研究代表者によって 2004 年ぐらいから創始されたことを注意しておく。一方，平均曲率流の微分幾何学的研究は，1984 年から G. Huisken によって、R. S. Hamilton によるリッチ流の研究をモチベーションとして創始され、その後、著名な幾何解析学者たちにより研究が進められている。より具体的に，研究開始当初の研究背景を説明する。ユークリッド空間内の等径超曲面は，1938 年に B. Segre により分類され，双曲空間内の等径超曲面は，1971 年 に P.J. Ryan により分類された。この証明において，キーとなるのは，主曲率達とそれらの重複度間に成り立つカルタンの恒等式とよばれる関係式により，主曲率の個数が高々2 個になることが示されることである。一方，球面内の等径超曲面の分類も，宮岡礼子教授，T. E. Cecil，G. R. Jensen と Q. S. Chi による研究により完成間近であった。1985 年，C. L. Terng は，ユークリッド空間内で等径超曲面の一般余次元版として等径部分多様体という概念を導入し，さらに，1989 年，無限次元ヒルベルト空間内で等径部分多様体の概念を導入した。その後，1995 年，C. L. Terng と G. Thorbergsson は，ユークリッド空間内のコンパクトな等径部分多様体，球面内の等径超曲面，双曲空間内のコンパクトな等径超曲面の一般概念として，（リーマン） 対称空間内で等焦部分多様体という概念を導入し，その研究がヒルベルト空間内の等径部分多様体の研究に還元できることを示した。一方，1999 年，E. Heintze と X. Liu は，無限次元ヒルベルト空間内の余次元2 以上の既約かつ充満な等径部分多様体に対する等質性定理を示し，2002 年，U. Christ は，既約コンパクト型対称空間 G/K 内の余次元 2 以上の等焦部分多様体 M に対する等質性定理を，あるヒルベルト空間 V から G/K へのリーマン沈めこみ ϕ によるリフト(これは等径部分多様体になる)が E. Heintze と X. Liu の結果により，V の等長変換からなるある群 H の軌道になるという事実を用いて示した。ここで，ϕ はゲージ理論の立場から自然に定義される写像であることを注意しておく。U. Christ は，証明において，H がバナッハリー群であることを認めたが，H がバナッハリー群になることは自明でなく，2012 年，C. Gorodski と E. Heintze が上述の群 H がバナッハリー群であることを示したことにより，U. Christ の証明のギャップを埋められた。研究代表者は，2000 年に名古屋大学で開催された第 47 回幾何学シンポジウムにおいて講演を行ったドイツのケルン大学の G. Thorbergsson 教授とのディスカッションにより，「上述の等質性の研究をはじめとするコンパクト型対称空間内の部分多様体の研究をヒルベルト空間内の固有フレッドホルム部分多様体の研究に還元して行うという研究方法と類似した研究方法を，非コンパクト型対称空間内の部分多様体の研究に対し，構築することはできないのか？」というオープンプロブラム(これは，G. Thorbergsson と C.L. Terng による論文で発表された 7 つのオープンプロブラムのうちの 1 つである)が重要であることを知り，その研究を創始し，2004 年にこの研究に関する最初の論文を発表した。この論文では，双曲空間内の等径超曲面の一般概念として，非コンパクト型対称空間内で複素等焦部分多様体という概念を導入し，2005 年，複素等焦部分多様体の研究が無限次元アンチケーラー空間とよばれる無限次元擬ヒルベルト空間内のアンチケーラー等径部分多様体とよばれるフレッドホルム部分多様体の研究に還元して行うことができることを示した。ここで，等径部分多様体は複素等焦部分多様体になることを注意しておく。その後，この研究を進め，2014 年，無限次元アンチケーラー空間 V 内のある種の余次元 2 以上の既約かつ充満なアンチケーラー等径部分多様体が，V の等長変換からなるある群 H の作用の軌道であること，つまり，等質であることを示した。さらに，最近，その群 H がバナッハリー群であることを示し，非コンパクト型対称空間 G/K 内のある種の既約な等焦部分多様体 M に対する等質性定理を，$\phi^{-1}(M^C)(\subset V)$ にそのバナッハリー群作用による等質性定理を適用することにより示した。ここで，M^C は，M の複素化を表し，ϕ は，無限次元アンチケーラー空間 V から G/K の複素化 G^C/K^C への擬リーマン沈めこみ写像を表す。この一連の研究をまとめたものが，“日本数学会編集「数学」論説，67 2015”に掲載されている。

次に，対称空間内の平均曲率流をはじめとする曲率流の研究に関する研究開始当初の研究背景について説明する．2009 年，X. Liu と C. L. Terng は，ユークリッド空間および球面内の等径部分多様体が平均曲率流に沿って有限時間でその焦部分多様体に崩壊することを示した．この研究に触発され，研究代表者は，コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体を発する平均曲率流の研究を始め，2011 年に類似した結果を示した。その証明は，コンパクト型対称空間へのあるリーマン沈め込みを通じて，ヒルベルト空間内の正則化された平均曲率流とよばれる流れの振る舞いをの問題に還元することにより遂行された。さらに，2014 年に，非コンパクト型対称空間内のある種の複素等焦部分多様体を発する平均曲率流について類似した結果を示した。その後，研究代表者は，対称空間内の曲率流の研究に関して，階数 1 の非コンパクト型対称空間内の正の平均曲率をもつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流の研究を行い，また，階数 1 の非コンパクト型対称空間内の特別な鏡映部分多様体の閉ボール上の半径が一定でないチューブを発する体積を保存する平均曲率流でノイマン境界条件を満たすものを研究した。一方，研究代表者は，ある種のヒルベルトリー群 G の作用をもつヒルベルト空間内の G 不変な部分多様体を発する正則化された平均曲率流について研究し，2017 年に，ある種の凸性保存性定理を示した。

最後に，コンパクト型対称空間の複素化上のカラビ・ヤウ構造の構成法，及び，そのカラビ・ヤウ多様体内の特殊ラグランジュ部分多様体の構成法に関する研究開始当初の研究背景について説明する．1993 年，M. Stenzel は，単位球面の余接バンドル上でカラビ・ヤウ構造を構成した。ここで，単位球面の余接バンドルは，その複素化と考えられるこ

とを注意しておく。その後，多くの微分幾何学者が，階数 1 のコンパクト型対称空間の複素化上で，あるリー群作用に関して不変なカラビ・ヤウ構造の構成法，及び，そのカラビ・ヤウ多様体内の余等質性 1 の特殊ラグランジュ部分多様体の構成法の研究を行っていた。

２．研究の目的

前述の通り，対称空間内の部分多様体の研究は，1995 年の C. L. Terng と G. Thorbergsson による研究から本格的にスタートし，歴史はまだ浅く，今後，盛んに研究されるべき研究対象である。また，上述のリーマン沈め込み(または，擬リーマン沈め込み)によって，研究対象を無限次元ヒルベルト空間(または，無限次元擬ヒルベルト空間)へリフトして研究するという方法は，外の空間の歪み(=曲率)を解消した平坦な無限次元線形空間内の研究に還元するものであり，今後，この研究方法により，対称空間内の部分多様体および曲率流に関する重要な問題が解決されることが期待される。また，平坦でないリーマン多様体内の部分多様体の平均曲率流をはじめとする様々な曲率流に沿う時間発展の研究を推進させることは，(部分多様体論的視点からの)幾何解析学，および，数理物理学の分野において，今後重要な課題である。それゆえ，平坦でないリーマン多様体のスタンダードモデルである対称空間内の様々な曲率流の研究を発展させることは，これらの分野において重要である。

研究期間内に，主に，次の 7 つの項目の研究を遂行したいと考えていた。

(1) 既約非コンパクト型対称空間内の余次元 2 以上の複素等焦部分多様体の等質性定理の改善.

(2) ヒルベルト空間内の余次元 2 以上の既約かつ充満な等径部分多様体が第 2 種 Kac-Moody 型無限次元対称空間のイソトロピー表現の軌道になるための十分条件の発見.

(3) 階数 1 の非コンパクト型対称空間内の鏡映部分多様体の閉測地球体上の半径一定でないチューブを発する体積を保存する平均曲率流でノイマン境界条件を満たすものの挙動の研究の改善.

(4) 非コンパクト型対称空間内の鏡映部分多様体の閉測地球体上の半径一定でないチューブを発する非等方的体積を保存する非等方的平均曲率流でノイマン境界条件を満たすものの挙動の研究.

(5) ヒルベルトリー群 G のある種の概自由な等長作用を備えたヒルベルト空間 V 内の正則化された平均曲率流の研究の推進，及び，そのゲージ理論への応用.

(6) 非コンパクト型対称空間内の正の平均曲率をもつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流に沿うリスケールされた誘導計量のサブリーマン構造への収束性の研究.

(7) コンパクト型対称空間の複素化上のカラビ・ヤウ構造の構成法，及び，そのカラビ・ヤウ多様体内の特殊ラグランジュ部分多様体の構成法に関する研究.

３．研究の方法

上述の(1)の具体的な研究内容，及び，研究方法は次の通りである。研究開始当初，既に示されていた複素等焦部分多様体の等質性定理において，その部分多様体に課されてる条件をより自然な条件にすり替えることができるかを模索した上，予想を立てた上，実際，その予想が正しいことを，その部分多様体の複素化の無限次元アンチケーラー空間へのリフトを利用するか，または，ビルディング理論を用いることにより示したいと考えていた。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

上述の(2)の研究については，具体的に，次のような方法で研究を行う予定であった。
U. Christ，E. Heintze と Gorodski の等質性定理によれば，ヒルベルト空間内の余次元 2 以上の等質な等径部分多様体を分類すればよい。一方，第 2 種 Kac-Moody 型無限次元対称空間(これは無限次元ローレンツ多様体)のイソトロピー表現の表現空間内のホロ超曲面(これはヒルベルト空間)への制限の主軌道は，等径部分多様体になる。ヒルベルト空間内の任意の余次元 2 以上の等質な等径部分多様体が，ある第 2 種 Kac-Moody 型無限次元対称空間のイソトロピー表現の表現空間内のホロ超曲面への制限のある主軌道として与えられることを，E. Heintze と C. Gro による第 2 種 Kac-Moody 型無限次元対称空間の分類結果を用いて示す予定であった。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

上述の(3)の具体的な研究内容，及び，方法は次の通りである。研究代表者により 2017 年にえられた結果において，初期チューブの半径関数が放射的であるという条件を課していたが，証明を見直すことにより，この条件をはずす，または，緩めることができるかどうかを検討し，この条件をはずすことができないと判断した場合には，反例を見つける予定であった。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

上述の(4)の具体的な研究内容，及び，方法は，次の通りである。2016 年に，研究代表者は，完備リーマン多様体内のコンパクト超曲面に対して，ホロノミー不変な非等方的表面エネルギー汎関数を定義し，それに付随して非等方的チューブという概念を Wulff 超曲面の一般概念として定義した。さらに，コンパクト型または非コンパクト型対称空間内の鏡映部分多様体上の非等方的チューブが非等方的等径超曲面になることを示した。このような状況の下，コンパクト型または非コンパクト型対称空間内の鏡映部分多様体上の(半径が一定とは限らない)チューブを発する非等方的体積を保存する非等方的平均曲率流の挙動を研究し，どのような条件下でその流れに沿って非等方的チューブに収束するのかを調べる予定であった。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

上述の(5)の具体的な研究内容，及び，方法は次の通りである。ヒルベルトリー群 G のある種の概自由な等長作用を備えたヒルベルト空間 V 内の正則化された平均曲率流のある種の崩壊定理の証明を完成させ，その定理をゲージ理論へ応用することであった。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

上述の(6)の具体的な研究内容，及び，方法は次の通りである。研究開始当初，イタリアの若手の数学者 G. Pipoli は，階数 1 非コンパクト型対称空間内で誘導計量を適当にリスケールした計量の逆平均曲率流に沿うサブリーマン構造への収束性を研究していた。当初，G. Pipoli との共同研究により，階数 2 以上の非コンパクト型対称空間内で，類

似した研究を創始していた。
上述の(7)の具体的な研究内容，及び，方法は次の通りである。階数１のコンパクト型対称空間の複素化上のカラビ・ヤウ構造の構成法，及び，そのカラビ・ヤウ多様内の特殊ラグランジュ部分多様体の構成法に関する先行結果を参考にして，コンパクトリー群作用に関して不変な滑らかな関数に対するG. Schwarzの定理を用いてることにより，一般階数のコンパクト型対称空間の複素化上で同様な構成法を構築することを予定した。この研究は、研究代表者が単独で研究を行う予定であった。

４．研究成果

上述の(1)の研究については，予定通り，研究成果を上げることができ、この研究に関する論文がOsaka Journal of Mathematics, vol. 57 (2020)に掲載されている。
上述の(2)-(4)の研究については，ある程度、研究を推進させたが、研究成果上げるまでには至らなかった。
上述の(5)の研究については，ある程度，研究成果を上げることができ、現在ある学術雑誌に投稿中である。(arXiv:math.DG/1811.03441v10を参照)
上述の(6)の研究については，ある程度、G. Pipoliとの共同研究において，ある程度，推進させることができたが、研究成果を上げるまでには至らなかった。
上述の(7)の研究については，予定通り，研究成果を上げることができ、この研究に関する論文がIllinois Journal of Mathematics, vol. 63 (2019)に掲載されている。
その他，研究期間内に，本研究内容と関係のある書籍(大学4年次の卒業研究や大学院生のゼミ向けの書籍)を2冊、執筆した。

１．平均曲率流 - 部分多様体の時間発展-，共立出版　2019年
２．理論物理に潜む部分多様体幾何 - 一般相対性理論・ゲージ理論との関わり -，共立出版　2021年

１の書籍は、平均曲率流を(はめ込みの時間発展として)微分幾何学の視点から学ぶ上で、教科書的存在になることを目指して書かれた。２の書籍は、一般相対性理論において時空として取り扱われるローレンツ多様体を一般化した概念である擬リーマン多様体内の部分多様体論，及び，リー群作用の軌道幾何学を学ぶ上で、教科書的存在になることを目指して書かれた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Koike Naoyuki	４．巻 63
２．論文標題 Calabi-Yau structures and special Lagrangian submanifolds of complexified symmetric spaces	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 575～600
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00192082-8018607	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Koike Naoyuki	４．巻 57
２．論文標題 Classification of isoparametric submanifolds admitting a reflective focal submanifold in symmetric spaces of non-compact type	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 207～246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/73746	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Naoyuki Koike, Hikaru Yamamoto	４．巻 194
２．論文標題 Gauss maps of the Ricci-mean curvature flow	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Geometriae Dedicata	６．最初と最後の頁 169-185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-017-0271-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naoyuki Koike	４．巻 195
２．論文標題 A modified mean curvature flow in Euclidean space and soap bubbles in symmetric spaces	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Geometriae Dedicata	６．最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-017-0273-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naoyuki Koike	４．巻 20
２．論文標題 Mean curvature flow of certain kind of isoparametric foliation on non-compact symmetric spaces	５．発行年 2018年
３．雑誌名 CUBO A Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 13-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4067/S0719-06462018000300013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　5件／うち国際学会　6件）

１．発表者名 Naoyuki Koike
２．発表標題 The existence and the uniqueness of regularized mean curvature flows
３．学会等名 International Workshop on Geometric Evolution Equations and Related Fields（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Naoyuki Koike
２．発表標題 Isoparametric submanifolds admitting a reflective focal submanifold in symmetric spaces of non-compact type
３．学会等名 Workshop on the isoparametric theory（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Naoyuki Koike
２．発表標題 Regularized mean curvature flow in a Hilbert space and its application to the Gauge theory
３．学会等名 The 22 Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and The 17th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名
Naoyuki Koike

２．発表標題
Regularized mean curvature flow in a Hilbert space and its application to the Gauge theory

３．学会等名
Symmetry and Shape (Celebrating the 60th birthday of Prof. J. Berndt)（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Naoyuki Koike

２．発表標題
Regularized mean curvature flow in a Hilbert space and its application to the gauge theory

３．学会等名
RIMS研究集会「非線形偏微分方程式における定性的理論」（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Naoyuki Koike

２．発表標題
Calabi-Yau structures and Special Lagrangian submanifolds of complexified symmetric spaces

３．学会等名
The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop ``Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems’’(日本学術振興会　二国間交流事業 韓国（NRF））（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
小池直之

２．発表標題
Regularized mean curvature flow in a Hilbert space and its application to the gauge theory

３．学会等名
日本数学会

４．発表年
2019年

〔図書〕　計2件

1．著者名 小池 直之	4．発行年 2021年
2．出版社 共立出版	5．総ページ数 440
3．書名 理論物理に潜む部分多様体幾何	

1．著者名 小池直之	4．発行年 2019年
2．出版社 共立出版	5．総ページ数 376
3．書名 平均曲率流-部分多様体の時間発展-	

〔産業財産権〕

〔その他〕

小池直之研究室
https://www.rs.kagu.tus.ac.jp/~koike/

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	田中　真紀子 (Tanaka Makiko) (20255623)	東京理科大学・理工学部・教授 (32660)	

6．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	酒井　高司 (Sakai Takashi) (30381445)	東京都立大学・理学研究科・教授 (22604)	
連携研究者	馬場　蔵人 (Baba Kurando) (40571641)	東京理科大学・理工学部・准教授 (32660)	
連携研究者	山本　光 (Yamamoto Hikaru) (50778173)	筑波大学・数理物質系・准教授 (12102)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関