様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 ２３ 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３３１３

研究課題名（和文）正則曲線を通じた幾何構造の研究

研究課題名（英文）Study of geometric structures via holomorphic curves

研究代表者
西納　武男（Nishinou, Takeo）

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：５０４２０３９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：複素多様体上の正則曲線，およびそれに関連する対象に関する研究を行った。特に，複素曲面上の特異な正則曲線について，変形の障害を局所的な計算により求める手法を開発した。この手法の応用として，長年未解決であったアーベル曲面上の正則曲線と，実2次元トーラス上のトロピカル曲線の間の対応を証明した。一方，2次元複素トーラス上のゲージ理論を調べることにより，複素トーラス上のHermitian-Yang-Mills接続の極限として，ミラートーラス上のラグランジアン部分多様体が自然に対応することを証明し，D-braneに関するミラー対称性予想の一部を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
以前知られていた手法では扱いが難しい対象について，新しい手法を開発することにより研究を可能にした。具体的には，計算が難しい障害がある場合の変形理論について，障害の計算を局所的な計算に帰着させることにより，長年未解決であった問題の解決に役立てた。また，これも扱いが難しい，横断正則性が成り立たない状況でのゲージ理論について，新たな手法を開発することで研究を進め，ミラー対称性予想の一部を証明した。

研究成果の概要（英文）：I conducted research on holomorphic curves on complex manifolds and related objects. In particular, I developed a method to determine the obstructions to deforming singular curves on complex surfaces through local calculations. As an application of this method, I proved a correspondence between holomorphic curves on Abelian surfaces and tropical curves on real 2-dimensional tori, which was a long-standing problem. On the other hand, by investigating gauge theory on 2-dimensional complex tori, I proved that as a limit of Hermitian-Yang-Mills connections on complex tori, a Lagrangian submanifold on the mirror torus naturally correspond, and I partially proved the mirror symmetry conjecture related to D-branes.

研究分野：幾何学

キーワード：変形理論　正則曲線

１．研究開始当初の背景
１９８０年代の半ばからグロモフ･ウィッテン不変量をはじめ､古典的な交差理論を一般化した、多くの量子不変量が発見された。これらの量子不変量の定義にはある種の横断正則性が必要とされ、幾何的には例えば考えたい多様体の複素構造又は概複素構造を一般に取ることで、交差理論における一般の位置をとることと類似の横断正則性が担保される。これにより量子不変量は変形不変性を持ち、その性質を用いて複素構造やケーラー構造のモジュライ空間を調べることができるという利点がある。このような背景から様々な問題が新たに創出され、長年にわたって多くの研究者が膨大な結果を発表している。一方で、複素構造を一般に取る必要から、一般でない各個の複素構造に関する繊細な性質については量子不変量で捉えられないものが多い。このような方向で研究を行っている研究者は少なく、研究手法も発展していなかった。

２．研究の目的
弦理論に端を発する新しい考え方を取り入れつつ、一般でない複素構造の性質の研究をはじめ、従来考えられていなかった、あるいは扱いが困難であった数学的課題への応用を試みることを目的とした。

３．研究の方法
横断正則性が成立しない状況は、複素構造の変形理論では変形の障害が存在する場合に対応する。一般にこのような場合の研究は困難で、歴史的に見ても数十年前の堀川の一連の代数曲面に関する研究、それに基づいた Friedman の正規交差多様体の変形の研究などが未だに代表的な例と言える状況である。本研究では、２０００年代に創始された、退化した状況を扱う幾何学であるトロピカル幾何学の考え方と、古典的な小平-Spencer による semiregularity と呼ばれる性質が成り立つ場合の変形理論の精密化を用いて､変形の障害が存在する場合の研究を進めた｡一方、多様体上の非線形偏微分方程式を扱うゲージ理論においても、同様に横断正則性が成立しない場合が存在し、このような場合にも断熱極限の考え方を用いて研究を進めた。

４．研究成果
(1) 2 次元複素トーラス上のゲージ理論の研究
小林-Hitchin 対応は、複素多様体上のベクトル束に対し、その上の安定ベクトル束の構造と、Hermitian-Yang-Mills 接続の対応を与える。一方、ミラー対称性は、安定ベクトル束に対し、そのミラー多様体上の Lagrangian 部分多様体を対応させると予想されており、これらを合わせることにより、Hermitian-Yang-Mills 接続と、Lagrangian 部分多様体のある種の対応が存在することが予想される。これを 2 次元複素トーラスの場合に証明した。そのために断熱極限と呼ばれる極限操作を用いる。具体的に述べると、まず 2 次元複素トーラスが、実 2 次元トーラス上の Lagrangian トーラスファイブレーションとして記述されいているとし、そのファイバーの直径が 0 に収束する族を構成する。その族の上に階数 2 の安定ベクトル束の族が存在していると仮定すると、小林-Hitchin 対応によって、U(2)をゲージ群とする Hermitian-Yang-Mills 接続の族が得られる。研究対象となるのは、これらの接続の族の、ファイバーの直径が 0 となるときの振る舞いである。この際、鍵となるのは、これらの接続をファイバーに制限したものを詳しく観察することである。実際、ファイバーの直径が 0 になる極限では、これらの制限が平坦接続に収束することが予想される。この制限が既約接続である場合は、以前の研究で接続が適切な意味で収束することを証明したので、本研究ではより困難な、制限が可約接続を含む場合を扱った。

可約接続が存在する場合は、上に述べた横断正則性が成立しない場合に対応し、一般に研究上の困難が大きく上昇する。その問題に対処するため、(a)ファイバー上の可約接続へのゲージ群作用の詳しい解析、(b)ファイブレーションの底空間からファイバー上の可約接続のモジュライ空間への写像の詳しい解析、(c)それらに基づいた精密なゲージ固定、などの手法を用いることで、最終的に接続の収束を証明した。

ファイバー上の平坦接続は、その双対トーラスの対称積上の点に対応することから、収束した極限の接続は、元の 2 次元複素トーラスにおけるファイブレーションの、双対トーラスをファイバーとする複素トーラス(これは元の複素トーラスのミラー多様体である)に対する多重切断を与える。これにより、接続の収束の系として次が示される。

定理
上の状況で得られた多重切断は、ミラー多様体上の特異点付き Lagrangian 部分多様体である。特異点は高々有限個で、始めに考えた安定ベクトル束の第一チャーン類が 0 であるならば、それらの特異点は複素特異点に解析同型である。

(2) 小平-Spencer による semiregular な場合の変形理論の精密化
小平-Spencer による、現代的な複素多様体の変形理論の構築の一部として、Severi が代数曲面上の代数曲線の場合に考案した、semiregular という条件が満たされる場合の変形理論の一般化がある。ここで、n 次元複素多様体 Z の余次元 1 の部分多様体 W について、自然な写像 $H^{n-2}(Z,K_Z)\to H^{n-2}(W,i^*K_Z)$が全射であるとき、W は Z において semiregular であるという。ただし、$i:W\to Z$ は包含写像、K_Z は Z の標準層である。Severi および小平-Spencer は、W が Z において semiregular であるとき、W の Z における変形の障害が消えることを示した。これは非常に強力な結果であるが、Z や W が smooth でなければならないことが具体的な適用の制限となる。本研究では、semiregularity の定義を smooth とは限らない多様体 W から smooth な多様体 Z への写像 $f:W\to Z$ で、余次元 1 の局所埋め込みになっているものに拡張し、Severi および小平-Spencer と同様の変形の障害の消滅を示した。これにより、W を smooth なものに制限する必要がなくなったことに加え、写像 f の像は被約でなくても良いので、障害の消滅を示せる範囲が大きく拡張した。証明法は小平-Spencer による代数的な議論に加え、特異点における解析を行うために、一部超越的な議論をする必要がある。これにより、小平-Spencer の議論における大域的な証明を、障害への局所的な寄与の足し合わせの計算に置き換えることが可能になった。この点は応用上も重要で、局所的な寄与は特異点そのものではなく、特異点周辺の情報から計算できるため、Z が特異多様体で、W の特異点が Z の特異点に写像されるような場合に対しても障害を計算できる。この点は(3)に述べる結果で重要な役割をする。
一方、ここでの議論は相対的な場合、すなわち、Z が変形するときに、それに伴って f も変形できるか、という問題に対しても適用できる。これは変動的ホッジ予想の精密化と考えられ、f が semiregular である場合に肯定的な結論を得た。また、写像 f の semiregularity と、f の像が古典的な d-semistability と呼ばれる条件を満たすことの関連を示した。

(3) アーベル曲面におけるトロピカル曲線と正則曲線の対応定理
Mikhalkin は、トーリック曲面上の代数曲線と、平面上のトロピカル曲線と呼ばれる 1 次元のグラフ状の対象との正確な対応を示した。代数曲線という基本的な対象に関わる話なので、その後も様々な問題が研究されたが、その中でアーベル曲面上の代数曲線の、トロピカル曲線を通じた研究という問題があった。これは Mikhalkin の結果において、平面上のトロピカル曲線の代わりに、2 次元実トーラス上のトロピカル曲線を考えるという話で、Mumford の構成によりトーリック曲面からとアーベル曲面を構成する方法も知られていたことから、多くの人が容易に思いつくと言えるような問題であったが、未解決のまま残されていた。その理由は問題の解決のために変形の障害を計算することが必要になるからであるが、そのような手法がなかったことが課題であった。本研究では、(2)で説明した、Z が特異である状況での障害の計算に基づき、この問題を解決した。

(4) 区分線型なベクトル場の積分と離散モース理論
Forman は多様体と限らない CW 複体に対して、組合せ的なモース関数を定義し、それに基づいて古典的なモースの不等式の類似の結果を示した。この結果は応用数学を中心に数多く適用されているが、幾何学的な観点からは、gradient flow が組合せ的に CW 複体のセルの間の写像として定義されるために、逆向きの flow を考えることができず、そのため双対性を扱う際には元の CW 複体と異なる複体を用いる必要があるという問題がある。本研究では、組合せ的なモース関数から、滑らかな多様体の場合と同様に各点に対して定義された gradient flow を構成し、それがモースの不等式を導くことを示した。このためには、一般の組合せ的モース関数を用いてはうまくいかないため、組合せ的モース関数が tame であるという条件を導入し、任意の組合せ的モース関数を tame なものに修正できることを示した。また、CW 複体上に適切に距離を導入することで、tame なモース関数は区分線型なベクトル場を与えるが、gradient flow はこのベクトル場から定義される。区分線型なベクトル場は通常の多様体におけるベクトル場と異なり、余次元の低いセル上では複数の方向にベクトルを持つ。そのため、付随した gradient flow も 1 価ではなく、点によっては複数の方向を持つ。このような問題があるため、これまで区分線型なベクトル場の積分曲線の良い定義は与えられていなかったが、本研究はモース理論的な観点からその問題の解答を与えたと言える。また、このような振る舞いにも関わらず、双対性は単に flow の向きを逆にすることで得られ、離散モース理論における問題点は解消されている。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Takeo Nishinou	522
2．論文標題	5．発行年
Integration of vector fields on cell complexes and Morse theory	2023年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Journal of Mathematical Analysis and Applications	20pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1016/j.jmaa.2022.126982	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Takeo Nishinou	111
2．論文標題	5．発行年
Convergence of Hermitian-Yang-Mills connections on two-dimensional Kaehler tori and mirror symmetry	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Letters in Mathematical Physics volume	63pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s11005-021-01405-1	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
NISHINOU Takeo	76
2．論文標題	5．発行年
Obstructions to deforming maps from curves to surfaces	2024年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Journal of the Mathematical Society of Japan	51-71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.2969/jmsj/86878687	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Takeo Nishinou	75
2．論文標題	5．発行年
パッチワーキングとトロピカル曲線	2023年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
日本数学会「数学」	225-245
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
なし	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 Takeo Nishinou	
2．発表標題 Deformation of curves on surfaces	
3．学会等名 Degenerations and models of algebraic varieties and related topics（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2021年	

1．発表者名 Takeo Nishinou	
2．発表標題 Obstruction to deforming maps from curves to surfaces	
3．学会等名 Tropical Geometry: new directions（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2019年	

1．発表者名 西納 武男	
2．発表標題 Obstruction to deforming maps from curves to surfaces	
3．学会等名 幾何学における代数的・組み合わせ論的視点（招待講演）	
4．発表年 2019年	

1．発表者名 Takeo Nishinou	
2．発表標題 Deformation of singular curves on surfaces	
3．学会等名 Seminar on Real and Complex Geometry（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2023年	

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関