

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03315

研究課題名(和文) Hubbard模型における磁性の安定性の厳密解析：作用素不等式によるアプローチ

研究課題名(英文) A rigorous analysis of the stability of magnetism in the Hubbard model: An approach using operator inequalities.

研究代表者

宮尾 忠宏 (Miyao, Tadahiro)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：20554421

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：金属強磁性の起源に関する数学的な理解は現時点でも不十分である。本研究では、金属強磁性の理論における基礎的な定理(Marshall-Lieb-Mattisの定理, Nagaoka-Thoulessの定理, Liebの定理)を統一的に記述することができる数学的な枠組みを作用素環論と作用素不等式を用いて構成した。一方で, Kondo格子模型やAnderson模型で記述される多電子系がフォノンと相互作用をしても, 基底状態の磁気的な特性は安定であることを証明した。これらの結果を, 先述の統一的な枠組みを用いた俯瞰的な視点により解析し, Marshall-Lieb-Mattisの定理との関連性を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでの金属強磁性に関する理論研究では, 個々の模型を解析することが中心で, 普遍的な構造を数学的に解明する試みはほとんどなかった。本研究では, 多電子系を記述する様々な模型の基底状態が持つ共通の数学的構造を解明することで, 磁気秩序の安定性に関する新しい知見を得た。その数学的構造の記述には, 作用素環論, 特にstandard formの理論が有効であることが判明した。このことは, 関連がほとんど意識されていない分野へ作用素環論が応用可能であることを意味し, 今後の発展が期待できる。

研究成果の概要(英文)：The mathematical understanding of the origin of metallic ferromagnetism remains insufficient at present. In this study, we constructed a mathematical framework using operator algebra and operator inequalities that can uniformly describe the fundamental theorems in the theory of metallic ferromagnetism, including Marshall-Lieb-Mattis' theorem, Nagaoka-Thouless' theorem, and Lieb's theorem. On the other hand, we proved that the magnetic properties of the ground state remain stable even when many-electron systems described by the Kondo lattice model or Anderson model interact with phonons. These results were analyzed from an overview perspective using the aforementioned unified framework and the relationship with Marshall-Lieb-Mattis' theorem was clarified.

研究分野：数理論理学

キーワード：金属強磁性 基底状態 作用素環論 作用素不等式 普遍性

1. 研究開始当初の背景

金属強磁性の起源は現在でも完全に理解できたとは言い難い。理論物理学における研究は、数学的に正当化されない近似計算や、数値計算によるものが大多数であり、厳密な数学に基づいた研究は多くはない。

研究開始当初、金属強磁性の理論研究において知られていた厳密な結果は、Marshall-Lieb-Mattis の定理、Nagaoka-Thouless の定理、Lieb の定理、Mielke-Tasaki の flat band 理論であった。これら基本的な定理の証明方法を異なる模型に応用し、類似の結果を導くことにより、金属強磁性の厳密解析は主に進んできていた。特に、Kondo 格子模型、周期的 Anderson 模型に Lieb のスピン鏡映正值性を適用し、これらの模型の基底状態の磁気特性を明らかにした Tian, Shen, Ueda, Tsunetsugu, Sigrist 等による 1990 年代の一連の研究により、金属強磁性の厳密解析は大きく進展したといえる。

一方で、これらの定理の間の関連については、各定理の証明方法に類似性が認められる程度で、よく分かっておらず、この分野の研究者の問題意識にはなかったようである。

2. 研究の目的

(1) 背景で述べた 4 つの定理を統一的に記述する数学的枠組みを構成する。背景で述べたように、4 つの定理の証明方法は、様々な模型に適用できる。そのため、統一的な数学的構造を解明する研究は、金属強磁性の背後にある普遍性を数学的に記述することに他ならない。

(2) 背景で述べた 4 つの定理の安定性を数学的に解析する。より正確には、多電子系とフォノンや量子電磁場に代表される環境系との相互作用を考え、4 つの定理がこれらの相互作用を考慮しても成り立つかどうかを調べる。現実の磁石が環境と相互作用していても安定であることは日常経験から明らかのため、4 つの定理は環境系との相互作用の下でも安定であることが予想される。

(3) (2) で得た諸結果を、(1) で得たより広い視点に立って解釈する。この研究は、新しく得られた結果が既存の研究成果とどのように関連しているのかを数学的に明確にすることに対応する。背景で述べたように、これまでの研究が、単なる知識の集積であったことを反省し、ここでは様々な研究成果との関連性に注目し、そこから更に新しい知見を導くことを目指す。

3. 研究の方法

本研究の特徴は、作用素環論における富田・竹崎理論及び、Haagerup による standard form を用いる点にある。加えて、von Neumann 環論における条件付き期待値の理論も応用する。筆者のこれまでの研究により、基底状態の磁気構造が、standard form 理論における positive cone で記述されることを突き止めた。本研究ではこの方向性を更に発展させる。加えて、具体的な模型の解析においては作用素不等式理論及び確率論を応用する。

少し詳しく説明すると、電子・環境相互作用系の基底状態の磁気特性を明らかにするためには、系を記述するハミルトニアンを熱半群を解析することになる。一般に、熱半群を汎関数積分表示すると確率論を用いた様々な解析が可能になることが知られている。本研究で解析するハミルトニアンが生成する熱半群は既存の確率的な記述のみでは取り扱いが難しく、作用素不等式と確率論を組み合わせることによりその数学的構造の解析が可能となる。更に強調したいのが、ここで用いる作用素不等式とは、通常関数解析の教科書などで取り上げられる作用素不等式ではなく、positive cone により誘導される順序構造を保存する意味での作用素不等式である。この不等式理論の電子・環境相互作用系への応用も、このプロジェクトの特徴の一つであると言える。この不等式の数学的な取り扱いと多電子系への応用法は、筆者がこれまでの研究でノウハウを蓄積してきており、このプロジェクトを通じて理論を更に発展させ、新しい応用法を開拓することも目的の一つである。

このように、本研究は方法論においても、数学的に広い分野が関連する総合的な研究プロジェクトである。

4. 研究成果

(1) 基底状態の磁気秩序を統一的に記述する枠組みの構成に関しては、以下の結果を得た。安定性クラスと呼ばれるハミルトニアンからなる集合を構成した。このクラスに属するすべてのハミルトニアンは基底状態に共通の磁气的性質を有する。この論文で提示した理論は、当該分野の研究者にはこれまでに明確に意識されていなかった新しいものであり、多電子系の基底状

態が有する、普遍的な構造の一部を数学的に明確に表現したものである。この論文は、試論的な性格が強いが、今後の研究の方向性が明らかになった。

各安定性クラスは、代表となる単純な形のハミルトニアン(代表ハミルトニアン)により特徴づけられる。代表ハミルトニアンにより記述される系の物理量を記述する von Neumann 環には、standard form が付随する。この standard form に関する positive cone により、安定性クラスに属するハミルトニアンの基底状態の磁気特性は記述することが出来る。ここで問題となるのは、このクラスに属するハミルトニアンは、様々なヒルベルト空間に作用し、代表ハミルトニアンと同じヒルベルト空間には作用しない。そのため、同じ positive cone による基底状態の特徴付けは出来ない。本研究では、この問題を作用素環論における条件付き期待値を用いて解決した。作用素環論における条件付き期待値とは、異なるヒルベルト空間上の von Neumann 環の間の関連を記述する理論である。条件付き期待値(の理論)を応用することにより、安定性クラスに属するハミルトニアン達の為すネットワーク構造が明確になった。これが、上に述べた多電子系の基底状態が有する、普遍的な構造の記述の概略である。

(2) 1. 基底状態の磁気構造の安定性の研究については、以下の結果を得た。まず、Hubbard 模型の基底状態の磁気的な性質は、フォノンとの相互作用の下で安定であることを証明した。詳細は下記の通りである：1989年に Lieb はスピン鏡映正值法を用いて、half-filling における Hubbard 模型の基底状態は基本的に一つしかなく、さらに基底状態のスピン量子数は考えている格子の構造により定まることを明らかにした。このプロジェクトでは、電子・格子相互作用系を記述する、Holstein-Hubbard 模型を解析し、その基底状態が基本的に一つしかなく、さらに、そのスピン量子数が Lieb の定理と同じ値になることを解明した。Lieb による証明方法は、Holstein-Hubbard 模型に対しては適用が難しいことが知られていた。この問題を解決するために、筆者は Holstein-Hubbard ハミルトニアンが生成する熱半群の性質を、汎関数積分法と順序を保存する作用素不等式理論を併用することにより詳細に調べた。その結果、熱半群の ergodicity の証明が可能となり、このことと Perron-Frobenius-Faris の定理を応用することにより、基底状態の一意性を証明した。基底状態のスピン量子数の決定に際しては、overlap 法と命名した新たな手法を開発した。この手法は単純だが汎用性があり、様々な模型に対して適応可能である。

2. Nagaoka-Thouless の定理の有限温度版である、Aizenman-Lieb の定理が電子格子相互作用のもとでも安定であることを証明した。ここでの問題は、電子・格子相互作用の分配関数に関する汎関数積分表示を構成することである。この研究では、場の量子論で発展していたループ空間上におけるボーズ場の汎関数積分表示と、グラフ上のラプラシアンが生成する熱半群に関する Poisson 過程を用いた汎関数積分表示を組み合わせることにより、この困難を乗り越えることに成功した。ここでの構成法は、 $SU(N)$ 模型など、様々な模型に対して適応可能である。

3. 周期的 Anderson 模型と近藤格子模型の基底状態の磁気的性質がフォノンとの相互作用の下でも安定であることを明らかにした。

周期的 Anderson 模型及び近藤格子模型の基底状態の解析は、Sigrist, Ueda, Tunetsugu によりなされていた。彼等の証明方法は、Lieb によるスピン鏡映正值法をそれぞれの模型に上手く適応させることによる。Holstein-Hubbard 模型の結果の説明の際にも述べたが、電子・格子相互作用系に対しては、Lieb による手法は応用が難しい。そこで、共著者の富永氏と共に筆者が開発した手法を更に発展させることにより、これらの模型を記述するハミルトニアンが生成する熱半群が ergodic であることを証明した。さらに、(1)で述べた一般論の枠組みにおける得られた諸結果の意味づけを行った。その結果は興味深いもので、ここで得られた基底状態の情報は、すべて反強磁性的 Heisenberg 模型の基底状態の構造に由来することが数学的に明確になった。

(3) この研究で開発した数学的なアイデアや技巧を用いて、場の量子論及びシュレーディンガー作用素の解析を行い、論文として発表した。

1. シュレーディンガー作用素への鏡映正值性の応用は、これまでになかった新しい試みである。筆者はシュレーディンガー作用素の基底状態期待に関する相関構造を鏡映正值性と作用素不等式理論を駆使して明らかにした。さらに、基底状態がポテンシャルの変動に対してどのように反応するのかを解析した。

2. Nelson 模型と呼ばれる、場の量子論で活発に研究されている模型に対して、このプロジェクトで開発した作用素不等式の理論を応用し、1970年代以来未解決であった問題を解決した。Nelson 模型は、紫外切断を除く過程においてエネルギーの繰り込みをすることにより定義される模型であるため、その解析が難しいことが知られている。Froehlich は 1970年代初頭に、この模型を詳しく解析した。その論文の中で、基底状態の一意性を予想していた。筆者はこの予想を作用素不等式理論と von Neumann 環論で良く知られている富田・竹崎理論を組み合わせることで

用することにより解決した。得られた結果は2部に分けて出版されており、第1部は予想の解決、第2部は抽象論の構成し第1部の結果を拡張している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Miyao Tadahiro, Nishimata Kazuhiro, Tominaga Hayato	4. 巻 10
2. 論文標題 Rigorous analysis of the effects of electron-phonon interactions on magnetic properties in the one-electron Kondo lattice model	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Quantum Studies: Mathematics and Foundations	6. 最初と最後の頁 177 ~ 201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40509-022-00288-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro, Tominaga Hayato	4. 巻 429
2. 論文標題 Electron-phonon interaction in Kondo lattice systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annals of Physics	6. 最初と最後の頁 168467 ~ 168467
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aop.2021.168467	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 22
2. 論文標題 On Renormalized Hamiltonian Nets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2935 ~ 2973
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00023-021-01029-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 21
2. 論文標題 Thermal Stability of the Nagaoka-Thouless Theorems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 4027 ~ 4072
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00023-020-00968-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 276
2. 論文標題 On the semigroup generated by the renormalized Nelson Hamiltonian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1948 ~ 1977
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2018.11.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 176
2. 論文標題 Stability of Ferromagnetism in Many-Electron Systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1121~1271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-019-02341-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 23
2. 論文標題 Correlation Inequalities for Schroedinger Operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Physics, Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 なし
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11040-019-9324-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 276
2. 論文標題 On the semigroup generated by the renormalized Nelson Hamiltonian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1948 ~ 1977
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2018.11.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Magnetic properties of ground states in many-electron systems
3. 学会等名 SNU operator seminar (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Magnetic properties of ground states in many-electron system
3. 学会等名 Mathematical aspects of quantum fields and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 "金属強磁性のメカニズム解明に向けた関数解析的アプローチ "
3. 学会等名 北海道大学数学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Magnetic properties of ground states in many-electron systems
3. 学会等名 東大京大合同オンライン作用素環セミナー (Online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 近藤格子模型の基底状態における磁気秩序の安定性について
3. 学会等名 信州数理物理セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Stability of ferromagnetism in many electron systems
3. 学会等名 iTHEMS Math Seminar(webinar), RIKEN (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Positivity improving property of the Nelson semigroup
3. 学会等名 Webinar on analysis and mathematical physics, University of Munic (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Stability of ferromagnetism in many electron systems
3. 学会等名 Progress in Mathematics of Topological States of Matters (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Extensions of the Nagaoka-Thouless theorem
3. 学会等名 Quantissima in the Serenissima III: Mathematical challenges in classical & quantum statistical mechanics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 On the semigroup generated by the renormalized Nelson Hamiltonian
3. 学会等名 The XIX International Congress in Mathematical Physics Montreal, Centre Mont-Royal (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 磁石と作用素不等式
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 On the renormalized Hamiltonian nets
3. 学会等名 スペクトル・散乱理論とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Mathematical analysis of retarded van der Waals potential
3. 学会等名 Kanazawa symposium on quantum dynamical systems and related topics (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

HP: Tadahiro Miyao https://sites.google.com/view/tadahiro-miyao-site/home

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	富永 隼人 (Tominaga Hayato)		
研究協力者	西亦 和宏 (Nishmata Kazuhiro)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics III	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics	開催年 2020年～2020年

国際研究集会 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------