様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３３１６

研究課題名（和文）種々の増大度を持つ解析的擬微分作用素の基礎理論の研究

研究課題名（英文）Study of analytic pseudodifferential operators with various bounds

研究代表者
本多　尚文（HONDA，NAOFUMI）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：００２３８８１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：解析的擬微分作用素は局所コホモロージー群が定義する核関数として導入され、その表象理論が作られた。表象の列の増大度を制限することによって，Gevreyクラスやwhitneyクラスのような種々の増大度を持つ解析的擬微分作用素のクラスを導入出来る。本研究課題はそれらのクラスの核関数を近年展開されているsubanalytic site上の層の理論やチェックドルボーコホモロジーの理論を用いて代数解析的手法で構成することが目的である。結果として研究代表者らが展開している多重超局所解析の範疇を含めて層の射の多重超局所関手を構成することで、これらの核関数の代数的な構成に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
例えば物体を破壊しないでひび割れをみつけるような非破壊検査は数学の逆問題の理論が重要な役割を果たしている。逆問題における手法の１つとして、障害物の近傍における現象を記述する解の特異性を利用する方法がある。このような解の特異性を理解する為には、解析的擬微分作用素の理論、特に、多重錘の周りでの多重超局所解析の理論が重要な役割を果たす。本研究課題の成果として、多重超局所解析における基礎理論を展開する上で最も基本的な道具と考えられる射の多重超局所化関手の構成に成功した。この関手の性質を更に深く研究することで、より詳細な解の特異性の伝搬を理解することが可能になると期待される。

研究成果の概要（英文）：The kernel functions of analytic microdifferential operators are introduced by using local cohomology groups and their symbols theory are also developed. Several class of microdifferential operators can be introduced by considering the growth order of symbols such as Gevrey or Whitney classes. Our purpose is, by the theory of sheaves on subanalytic sites and Cech-Dolbeault cohomology theory, to formulate these kernel function from the viewpoint of algebraic analysis.
We have succeeeded in constructing multi-microlocalization functor of morphisms and, as a result, formulating framework of these kernel functions with required growth order from the viewpoint of microlocal analysis.

研究分野：代数解析学

キーワード：解析的擬微分作用素　Gevreyクラス　超局所解析　多重直局所解析

１．研究開始当初の背景

解析的擬微分作用素は，佐藤，河合，柏原によって，超局所化関手を正則関数の層に施すことで得られるコホモロジー群の切断をその核関数とすることにより導入された。このような擬微分作用素は，超局所化された対象(例えばマイクロファンクション)に作用する超局所作用素の中で,(解析的カテゴリーにおいて)最も広いクラスをなすと考えられており，例えば，分数階微分もこの範疇に含まれている。応用上も重要なクラスであり，例えば単純極大過剰決定系を標準形に変換するときに，そのモノロドミーを平坦化する為に用いられる。

解析的擬微分作用素は超局所化関手を用いて導入されている為，超局所解析の諸問題において,代数的道具を用いた強力な論法を援用することが出来る。しかしながら，具体的な問題では，作用素の表象を用いた所謂表象計算が便利な時も多い。そこで，青木は解析的擬微分作用素の表象理論の基礎を確立した。

解析的擬微分作用素の表象は正則関数の列からなるので,その列の増大度に制限を加えることで，Gevrey クラスの解析的擬微分作用素や双対とも言える(Gevrey 指標を持つ)Whitney クラスの解析的擬微分作用素が定義出来る。不確定特異点型の極大過剰決定系の(超局所)変換には一般にその不確定特異点度に応じた Gevrey クラスの解析的擬微分作用素が必要である。また,Gevrey クラスの漸近展開層を超局所化したものは，その Gevrey 指標を持つ Whitney クラスの解析的擬微分作用素の商群で与えられる。このように，不確定特異点を持つ方程式系の超局所解析には対応する増大度を持つ解析的擬微分作用素が必要不可欠である。

代数解析の特徴の１つは，対象を関手的に構成することにより，対象を代数的に取り扱えるようにすることである。従って，これらの種々の増大度を持つ解析的擬微分作用素に対してもその核関数の関手的構成が強く望まれる。しかしながら，それぞれの増大度でその増大度固有の本質的困難があり，以下に述べるように核関数の関手的構成は非常に困難であった。以下にその困難と研究開始当時の予想された展望を述べる。

(1) 一般に境界での増大度制限がある正則関数のなす前層は古典的な意味では層とならない。しかし，古典的な層の概念を拡張した subanalytic site 上の層の理論が柏原、Schapira により確立されており，例えば，境界で多項式増大を持つ正則関数の層は，subanalytic site 上の層として意味をなす。この層に超局所化関手を施すと多項式増大を持つ解析的擬微分作用素の核関数が得られる。従って，Gevrey クラスの対応物である subanalytic site 上の層の存在が期待される。しかしながら，研究代表者らの論文によって, そのような層は subanalytic site 上に存在しないことが示され, Gevrey クラスでの核関数を構成出来ない状態が長らく続いている。近年, Schapira らが linear site 上の層の理論を作り，この site 上には Gevrey class での対応物となる層が存在することが示された。従って，この linear site 上の層から Gevrey クラスの解析的擬微分作用素の核関数を作ることが可能と考えられた。

(2) 核関数の正則関数による表示では Cech コホモロジーを用いるため，Stein 領域上での所謂岡の消滅定理が必要になる。ところが，岡型の消滅定理は Whitney クラスの正則関数の場合，Stein 領域で必ずしも成立しない。実際，我々が用いる Stein 被覆には高次コホモロジーが消滅しないものが現れるのである。従って, 表象との対応において Cech 表現を用いることは出来ない。最近，諏訪が Cech-Dolbeault コホモロジーを用いて局所コホモロジーを表現することを研究している。また，諏訪および研究代表者によって，Cech-Dolbeault コホモロジを用いることで佐藤の超関数の理論が極めて簡単になることも示されていた。Cech-Dolbeault 理論によれば,局所コホモロジーは 2 つのなめらかな形式の組によって代表され，しかも，考えている領域において Stein 性等を必要としない。従って, 表象との対応において，Cech-Dolbeault コホモロジーによる表現を用いると，ここで述べている困難は回避出来ると考えられていた。

(3) 今まで述べてきた対象は１つの多様体に沿った超局所化で現れるものである。しかしながら、複数の多様体に沿った超局所化が必要となる重要な解析的対象がいくつも存在する。例えば、small second microlocalization や同時多重超局所化、正規交差する多様体に沿った強漸近展開の理論である。このような対象を統一的に扱える理論として研究代表者と L.Prelli によって多重超局所化の理論が作られた。しかしながら、この理論においてこれらの対象に作用する多重超局所作用素を与えるような関手の構成法が明らかではなかった。これは、対象自身というよりは対象間の射の多重超局所化を構成することが本質的に必要であり、構成方法について新しいアイデアが必要な状況であった。

２．研究の目的

本研究の目的は，Gevrey クラスおよび Gevrey 指標を持つ Whitney クラスの解析的擬微分作用素に対し, 多重超局所化の場合も含んでその核関数の関手的構成を行い，表象と核関数間の種々の性質を確立することである。具体的には，以下を明らかにする。

(1) subanalytic site 上の層に多重強局所化の枠組みで射の超局所化関手を構成する。

(2) subanalytic site 上の増大度付きの正則関数の層に(1)で構成した超局所化関手を施すことで核関数を構成する。このとき，種々の消滅定理，特に楔の刃型の消滅定理が必要となるので，それを確立する。

(3) 構成した核関数の Cech-Dolbeault 表示を与え，核関数のコホモロジーの意味での積や共役の操作が，Cech-Dolbeault 表示でどのような操作となるかを研究する。

(4) 増大度付きの擬微分作用素に対応する表象の空間を構成する。その後, Cech-Dolbeault 表示による核関数と増大度付き表象間の対応射を構成し，それが同型であることを示す。また，この射が両者の積や共役と両立することを，Cech-Dolbeault コホモロジーの枠組みで示す。

増大度付きの解析的擬微分作用素は，不確定特異点型の極大過剰決定系やその漸近解析の超局所解析において重要な役割を果す。本研究により，これらの問題において表象計算のみならず代数的な手法による研究も可能となり，様々な新しい結果が得られることが期待されている。

３．研究の方法

本研究課題の遂行には，様々な分野の専門知識が必要であり，それぞれの分野での以下に挙げる専門家との研究打ち合わせが不可欠である。

(1) 擬微分作用素の専門家として，青木貴史(近畿大学)，岡田靖則(千葉大学)，山崎晋(日本大学)。

(2) Subanalytic site 上の層の専門家として，内田素夫(大阪大学)，Luca Prelli (Padova, Italy)。

(3) Cech-Dolbeault 理論の専門家として諏訪立雄(北大名誉教授，東京在住)。

これらの研究者と研究打ち合わせを密に行った。また，各年度に当該研究課題に関する研究集会を北海道大学で開催し，上記の研究者を中心とした研究者と知見の共有を行うことで，研究課題の遂行を促進させた。

４．研究成果

本研究課題の実施期間に次の成果を得た。

(1) まず、多重超局所作用素の核を与える為に射の超局所化関手を構成した。部分多様体が１つの場合は積多様体とその対角多様体の組が基本的な幾何的配置となる。多重超局所化のように複数の部分多様体が現れる場合への拡張概念として「普遍部分多様体の族」の概念を導入した。この普遍部分多様体の族にそって射の関手 Hom を多重超局所化することにより、射の多重超局所化関手 μHom を構成した。更に residue map(derived category における積分)を用いることで、この関手を subanalytic site 上の増大度を持った層に適用させることで得られる擬微分作用素の核が様々な多重超局所化された対象に作用することを示した。以上の結果をまとめると、射の超局所化関手を構成することで増大度を持った擬微分作用素の核関数を代数解析の枠組みで与えることに成功した。また、この核関数が超局所的に作用することを示した。

(2) このようにして様々な多重超局所作用素が得られた訳だが、ある部分多様体の族の多重超局所作用素が同じ部分多様体に沿った超局所的対象に作用するのは当然として、異なった部分多様体の場合でも作用することがある。その典型的な例は通常の擬微分作用素は small second microlozalization による対象に作用する。このような現象を統一的に扱うことを可能にする為に普遍部分多様体の族のなかの安定多様体の族の概念を導入し、一般的な作用の仕組みを明らかにした。

(3) このように構成した核にたいして表象理論を作ることが次の目標である。そのためには、

これらの関手を Cech-Dolbeault コホモロジーの枠組みで捉え直す必要がある。(1)で述べたように擬微分作用素の積や作用は derived category の residue map の超局所化によって与えられる。この作用と Cech-Dolbeault コホモロジーが形式で表現されることから自然に定義される積分によって誘導される作用が、互いに同じ作用や積を与えることを示さなければならない(作用の両立性)。この両立性を確認することは非常に複雑で込み入った論議が必要になるが基本的な部分から１つ１つ確認することで両立性を確立することが出来た。

(4) 以上の基本的な準備の元で表象理論を構成することが本研究課題の大きな目的の１つである。残念ながら研究年度後半からの COVID-19 による諸所の事情により表象理論を研究する余裕はなかった。 基本的な道具は準備がおおよそ終わっているので今後の研究課題としたい。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Naofumi Honda	４．巻 2101
２．論文標題 Hyperfunctions and Cech-Dolbeault cohomology in microlocal point of view	５．発行年 2019年
３．雑誌名 RIMS Koukyuroku	６．最初と最後の頁 7-12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naofumi Honda and Luca Prelli	４．巻 256
２．論文標題 On the Algebraic Study of Asymptotics	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	６．最初と最後の頁 227-238
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Catalin I. Carstea, Naofumi Honda and Gen Nakamura	４．巻 50
２．論文標題 Uniqueness in the inverse boundary value problem for piecewise homogeneous anisotropic elasticity	５．発行年 2018年
３．雑誌名 SIAM J. Math. Anal.	６．最初と最後の頁 3291-3302
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naofumi Honda and Kouhei Umeta	４．巻 70
２．論文標題 Laplace hyperfunctions in several variables	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 111-139
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Naofumi Honda
２．発表標題 Multi-microlocal operators and their composition
３．学会等名 RIMS symposium, Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関