

令和 5 年 4 月 18 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03321

研究課題名(和文)作用素環論における群作用のK理論的側面からの研究

研究課題名(英文)Study of group actions on operator algebras from K-theoretic aspect

研究代表者

松井 宏樹 (Matui, Hiroki)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：40345012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環への群作用の分類は作用素環論における最も重要な研究課題の一つである。泉正己氏(京都大学)との共同研究によって、poly-Z群のKirchberg環への外部的な作用の完全分類に成功した。このような広い枠組みで作用の分類が得られたのは初めてである。カントール集合上の極小力学系からetale groupoidを構成し、そのgroupoid C\*環を解析し、ホモロジー群や位相充足群の性質を調べることは、近年重要な研究課題として注目されている。本研究ではgroupoidの組に対してホモロジー群の長完全列が生じることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環という無限次元の代数的な構造が持つ対称性の理解を深めることができた。解析学と代数学と幾何学が交錯する点が特徴的である。また、カントール集合という0次元の空間上の構造の対称性についても研究を行い、ホモロジー群を通して理解を深めた。作用素環とカントール集合は全く異なる対象ではあるが、直接目で見ることができない対称性を解明した点で価値観を共有している。

研究成果の概要(英文)：Classification of group actions is one of the most important subjects in the theory of operator algebras. In the collaboration with M. Izumi (Kyoto University), I completely classified outer actions on poly-Z groups on Kirchberg algebras. Such a broad classification result has not been known so far. From minimal dynamical systems on the Cantor set, one can construct etale groupoids and groupoid C\*-algebras. Recently, homology groups and topological full groups of these groupoids have attracted much attention. I proved that a long exact sequence of homology groups arises from a certain pair of etale groupoids.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 群作用 極小力学系

## 1. 研究開始当初の背景

作用素環論は 20 世紀前半に成立した比較的新しい分野であるが、理論内部の問題の研究においても他分野との交流においても、近年多くの目覚ましい進展があり、その重要性は高まって来ている。作用素環は大きく von Neumann 環と  $SC^*$ 環に分かれる。前者は可測空間の非可換化であり、後者は位相空間の非可換化である。von Neumann 環に関しては、フィールズ賞を受賞した A. Connes による単射的 von Neumann 環の分類理論以降、1970 年代から現在に至るまで活発な研究が続けられている。一方 K 理論を用いた  $C^*$ 環の研究は 1990 年代以降に爆発的な進展を遂げた。2000 年代前半までに得られた重要な成果としては、AT 環の分類 (G. Elliott)・Kirchberg 環の分類 (E. Kirchberg-N. C. Phillips)・tracial rank zero を持つ  $SC^*$ 環の分類 (H. Lin)・単純な  $C^*$ 環上の自己同型の研究 (岸本晶孝)・単純な  $C^*$ 環への有限群作用の研究 (泉正己)・カントール集合上の極小同相写像の軌道同型による分類 (T. Giordano-I. F. Putnam-C. F. Skau) などがあげられる。

## 2. 研究の目的

### (1) $C^*$ 環への群作用の分類

単純核型  $C^*$ 環への群作用をコサイクル共役で分類することを目指す。 $C^*$ 環が単純であるとは自明でないイデアルを持たないことを言う。積が可換な  $C^*$ 環 (つまり位相空間上の連続関数環) はイデアルを豊富に持つので、単純な  $C^*$ 環は極めて非可換性の強い対象であると言える。位相空間に群が作用しているような設定では、(単純すぎてつまらないケースを除いては) 作用の共役による分類は手の届かない複雑な問題である事が多い。しかし非可換性が極めて強い状況では、逆に問題が「純化」され、結果的に (コサイクル) 共役による同値類が少なくなり、分類が可能となることが多々ある。この現象を最初に明らかにしたのは Connes である。そして von Neumann 環の場合には、Connes の結果を発展させる形で、単射的因子環への従順離散群の作用の分類が 80 年代に完成している。しかし  $C^*$ 環の場合には K 理論的障害を含む様々な困難が発生するため、全ての従順群を統一的に扱うことは (少なくとも現時点での技術では) 難しい。そこで群作用の分類に関しては考察の対象を poly-Z 群の作用に限定する。poly-Z 群とは、Z による半直積を取る操作を有限回繰り返して得られる群をいう。poly-Z 群の分類空間は有限次元 CW 複体と同じホモトピー型を持つので、群作用の分類を何とか射程に入れることが出来る。Kirchberg 環への poly-Z 群の作用の分類については、泉正己氏 (京都大学) との共同研究を鋭意進めているところであり、この研究の完成を目指したい。一方安定有限  $C^*$ 環への作用については、 $C^*$ 環と群とを限定した上で、攻略可能なケースを個別に研究していくという段階にある。まず、出来るだけ緩やかな状況設定で、分類可能な  $C^*$ 環のクラスが接合積を取るという操作で閉じていることを示す。次に、分類可能な単純核型  $C^*$ 環であってトレース状態を唯一持つようなものを考え、そのような環への Z 作用を分類したい。

### (2) 極小力学系の解析

力学系が極小とは自明でない不変閉集合が無いことを言い、それは付随する  $C^*$ 環が単純であることと同値である。極小力学系から生じる  $C^*$ 環の分類は、 $C^*$ 環論の中でも現在最も活発に研究されている方向の一つである。現実的な目標としては、 $Z^N$  の極小な作用から生じる接合積  $C^*$ 環の K 理論による分類を目指す。カントール集合上の極小力学系に付随して生じる位相充足群の研究も重要なテーマである。極小な Z 作用の場合、位相充足群の交換子群は単純かつ従順な無限群で、しばしば有限生成となる。位相充足群はこのような性質を持つ群の最初の例として注目を浴びている。さらに、有限型サブシフトから生じる位相充足群は、Higman-Thompson 群の一般化とみなされ、交換子群の単純性・Haagerup 性・有限表示性などが分かっている。また、一般に、位相充足群の同型類は、極小力学系の連続軌道同型についての完全不変量であることがわかっている。したがって、極小力学系の連続軌道同型による分類は、位相充足群の分類と同値である。さらに、極小力学系のホモロジー群を定義することができて、位相充足群のアーベル化との関係性を主張する AH 予想と、 $C^*$ 環の K 群との同型を主張する HK 予想を、私は提唱している。このように位相充足群は離散群論の立場から見ても極めて興味深い性質を持ち、他方で、 $C^*$ 環とその Cartan 部分環や  $C^*$ 環の K 群とも深い関わりを持っている。本研究の目的は位相充足群を群論と  $C^*$ 環論の両方の側面から研究することである。具体的には、様々な極小力学系から生じる位相充足群に対して、その従順性などの解析的な性質と、単純性や有限生成性や有限表示性などの代数的・幾何的な性質を、 $C^*$ 環論の視点から包括的に取り扱うことの出来る理論を構築する。

### 3. 研究の方法

研究目的を達成するため、作用素環論や力学系理論などの近い研究主題を持っている研究者と交流し、研究討論を通じて情報を収集する。具体的には、海外・国内を問わず、研究集会やワークショップなどに積極的に参加する。

研究討論・情報交換・共同研究を行うためには、電子メール等によるやり取りだけでは全く不十分である。お互いの研究成果について具体的な議論を交わすことが最も重要で、研究の促進に効果的である。また、電子メール等によるやり取りだけでは意思疎通の精度に限界があるため、時として研究内容や成果について誤解が生じかねない。万一そのような問題が生じたときの対応策としても、実際に会って研究方法や成果を議論する事は重要であり、問題の解決につながる。このような理由から、海外・国内の研究協力者を訪問する事は重要な意義がある。

国内で予定されている学会にも積極的に参加して、国内の研究者との連携を図りつつ、長期的な視点に立って今後の研究の幅を広げていく。具体的には、春と秋に行われている日本数学会の年会や、秋と冬に京都大学数理解析研究所で行われている作用素環論の研究集会や、秋頃に行われている作用素論と作用素環論の合同研究集会に、参加する。

### 4. 研究成果

#### (1) $C^*$ 環への群作用の分類

作用素環への群作用の分類は作用素環論における最も重要な研究課題の一つである。フォンノイマン環への離散従順群の作用については、満足できる最終的な結果が既に前世紀に得られている。しかし  $C^*$ 環の場合には、様々な困難さのため未だ発展途上の段階にある。泉正己氏（京都大学）との共同研究によって、**poly-Z** 群の **Kirchberg** 環への外部的な作用の完全分類に成功した。**Kirchberg** 環は、**K** 理論による分類が可能な  $C^*$ 環のなかでも、とりわけ性質の良い  $C^*$ 環のクラスである。**poly-Z** 群とは、整数群 **Z** による有限回の半直積で記述できる群のことをいい、有限生成自由アーベル群や離散ハイゼンベルグ群を含んでいる。 $C^*$ 環と群の双方に対して強い仮定を課しているように見えるが、これまでの先行研究はすべて特定の  $C^*$ 環あるいは特定の群に限った研究であり、**Kirchberg** 環や **poly-Z** 群といった広い枠組みで作用の分類が得られたのは初めてである。作用の分類は何らかの不変量によるものではなく、**poly-Z** 群の分類空間が **Kirchberg** 環の自己同型群の分類空間への写像のホモトピー同値類との対応によって、分類が与えられる。成果は 3 つの論文にまとめられた。1 つ目の論文では、**Kirchberg** 環の自己同型群とあるユニタリー群とが弱ホモトピー同値になることを示した。2 つ目の論文では、**poly-Z** 群の作用に関するコサイクル消滅定理や、2 つの作用がコサイクル共役になるための必要十分条件を、定式化した。3 つ目の論文では、既に得られていた成果をもとに、**poly-Z** 群の作用の分類定理を最終的に完成させた。その後ベルギーの **G. Szabo** 氏によって、さらに広いクラスの群や  $C^*$ 環に対する群作用の分類の研究成果が発表された。この成果を含め、作用素環への群作用やその周辺分野についての情報収集を行った。

#### (2) 極小力学系の解析

極小力学系から生じる  $C^*$ 環の研究については、近年、**etale groupoid** から  $C^*$ 環を構成するという枠組みが注目されている。中でも **groupoid** のホモロジー群は、**groupoid** の重要な不変量の一つとして、また  $C^*$ 環の **K** 理論との関係という点からも、重要視されている。特に、**groupoid**  $C^*$ 環の **K** 群と **etale groupoid** のホモロジー群との関連性を調べることは、 $C^*$ 環の **K** 群による分類理論と極小力学系の構造の理解という二つの視点が交差する興味深い問題である。カナダの **I. F. Putnam** 氏は最近の研究において、**groupoid** の組に対してそれらに対応する  $C^*$ 環の **K** 群を関連付ける研究を行った。本研究ではそのホモロジー群における類似を考察し、ホモロジー群の長完全列が生じることを明らかにした。成果を論文としてまとめ、学術雑誌に掲載された。オンラインで **the University of Newcastle** のセミナーで講演発表し、情報交換を行った。また、**Hausdorff** とは限らない **etale groupoid** は、**Grigorchuk** 群などのエキゾチックな群と関係が深く、重要な研究対象である。本研究では、**Hausdorff** とは限らない **etale groupoid** に関する勉強会を行い、対象に対する理解を深め、研究の方向性について検討した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Izumi Masaki、Matui Hiroki	4. 巻 2021
2. 論文標題 Poly-Z Group Actions on Kirchberg Algebras I	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 12077 ~ 12154
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnz140	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masaki、Matui Hiroki	4. 巻 224
2. 論文標題 Poly-Z group actions on Kirchberg algebras II	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Inventiones mathematicae	6. 最初と最後の頁 699 ~ 766
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00222-020-01019-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi Masaki、Matui Hiroki	4. 巻 14
2. 論文標題 A weak homotopy equivalence type result related to Kirchberg algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 1325--1363
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JNCG/392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matui Hiroki	4. 巻 42
2. 論文標題 Long exact sequences of homology groups of etale groupoids	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 5239 ~ 5239
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2022095	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 H. Matui
2. 発表標題 Various examples of topological full groups
3. 学会等名 Symmetry in Newcastle (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 H. Matui
2. 発表標題 On the homology groups of totally disconnected étale groupoids
3. 学会等名 Measurable, Borel, and Topological dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	泉 正己  (Izumi Masaki)		
研究協力者	吉田 啓佑  (Yoshida Keisuke)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------