様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８K０３３２２
研究課題名（和文）簡約リー群及びリー代数の誘導表現の研究

研究課題名（英文）Study of induced representation of reductive Lie groups and Lie algebras

研究代表者
松本　久義（MATUMOTO, Hisayosi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：５０２７２５９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：g を複素簡約リー代数、pをその放物型部分代数とし V_1, V_2 をpの有限次元既約表現とする。M_1, M_2 をそれぞれ V_1, V_2からgへの誘導表現（つまり一般化バルマ加群）としたときM_1からM_2への準同型の空間の次元がV_1の次元とV_2の次元の積で上から抑えられることを示した。この評価は V_1, V_2を定める一般化バルマ加群のパラメーターに依存しているが、移送原理など既存の一般論を組み合わせると特定の有限個のパラメータを参照すればよく、任意の一般化バルマ加群の間の準同型のなす空間の次元の(g, p)のみに依存する上からの評価が得られる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
表現論は対称性を研究する学問であり数学並びに自然科学の多くの分野へ応用がある。
連続的な対称性はリー群という数学的対象で記述でき,簡約リー群は対称性に置いて非可換な本質的な部分を担っている基本的な対象である。簡約リー代数は簡約リー群の局所的な構造を記述する代数的対象であり、簡約リー群や簡約リー代数の表現論は数学のみならず物理学や化学などに置いて多くの応用を持つ現代数学における大きな分野を形作っている。一般化されたVerma加群の間の準同型の分類はその中で現れた自然な問題であり、表現論内部だけでなく放物幾何などに置いても重要な意味を持つ。

研究成果の概要（英文）：Let g be a complex reductive Lie algebra and let p be a parabolic Lie subalgebra of g. Let V_1 and V_2 be finite-dimensional irreducible representation of p. We denote by M_1 and M_2 be induced representations from V_1 and V_2 from p, respectively. We proved that the dimension of the space of the homomorphisms of M_1 to M_2 is bounded by the product of the dimension of V_1 and V_2. Using translation principle, we obtain an estimate of the dimension of the space of the homomorphisms of M_1 to M_2 only depending on (g, p).

研究分野：表現論

キーワード：一般化バルマ加群　半単純リー代数　ユニタリ表現　微分不変量

１．研究開始当初の背景

g を複素簡約リー代数、p をその放物型部分代数とする。p の既約有限次元表現から g への誘導表現は一般化された Verma 加群と呼ばれる。一般化された Verma 加群の間の準同型は一般化された旗多様体の上の同変ベクトル束の間の同変微作用素と対応しており、Baston らによって提唱されている一般化された旗多様体をモデルとする、parabolic geometry の観点からも興味深い。p が Borel 部分代数の時が Verma 加群であり、Verma 加群の間の準同型を決定することは Verma, Bernstein, Gelfand, Gelfand によって 1970 年前後あたりから知られている有名な結果がある。(Verma は準同型の存在の十分条件を与え、Bernstein, Gelfand, Gelfand はそれが必要条件になっていることを示した.)　以下直線束の場合に当たるスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の場合と一般の場合にわけて論じる。

（1）　スカラー型の場合
Borel 部分代数の既約有限次元表現は全て１次元であるため上記の Verma 加群の場合はこの場合に含まれる。その後 1970 年代に Lepowsky が p が実半単純 Lie 代数の極小放物型部分代数の複素化の場合の直線束の場合に Verma の結果を弱い形で拡張するなどの結果を幾つか得た。また Lepowsky は nontrivial な準同型はすべて単射であり存在すればスカラー倍を除いて一意であることも示した。
その後研究代表者は放物型部分代数 p が極大の場合の準同型の分類を完成させたがそこでは一般の放物型部分代数の場合に ある種の比較定理により p が極大の場合の準同型の存在から準同型の存在が導けることも示していた 。（このような準同型を elementary な準同型と呼ぶ。)
そこで予想としては「任意のスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は elementary なものの合成で書けるであろう。」
というものが考えられる。この予想が肯定的に解ければ準同型の分類が得られることになる。例えば p が Borel 部分代数の時は、Bernstein-Gelfand-Gelfand の結果はその予想が肯定的であるということに他ならない。
まず Soergel の結果より問題は容易に無限小指標が integral な場合に帰着されるのでこのような場合のみ考えればよい。この予想について、研究代表者は strictly normal というクラスの放物型部分代数に対して予想を無限小指標が非特異という条件のもとで肯定的であることを示していた。　さらに gl(n,C)の場合には分類を完成させ、類似の方法で古典型の場合にも部分的な結果を得ていた。

(2)　一般の場合

スカラー型とは限らない一般の場合については難易度が跳ね上がり、分類について特別な場合を除いては何もわかってない状況である。nilradical が可換であるような極大放物型部分代数の場合には 1980 年代後半に Boe-Enright-Shelton によって分類がなされたがそれ以外については Irving らによってランクの低い場合に具体例の計算が散発的に計算されているのみである。研究の関心は分類というよりは Barchini, Kubo, Zierau らにより Conformal system と関連させるなどして極大放物型部分代数の場合に具体的に準同型の実例を構成するような方向に移っていった状況である。この場合準同型のなす空間が 2 次元になる例が Irving らによって見出されており準同型は一般に単射ではないので non-trivial な準同型の合成がゼロになりうるので分類を考えるといっても事態は非常に複雑である。

２．研究の目的

有限自由度を持つ連続的な対称性はリー群という数学的対象で記述できる。リー群はほぼ簡約リー群と冪零リー群の組み合わせで理解できる。冪零リー群は可換リー群の組み合わせとして理解であるので、簡約リー群は対称性に置いて非可換な本質的な部分を担っている基本的な対象である。簡約リー代数は簡約リー群の局所的な構造を記述する代数的対象であり、簡約リー群や簡約リー代数の表現論は数学のみならず物理学や化学などに置いて多くの応用を持つ現代数学における大きな分野を形作っている。一般化された Verma 加群の間の準同型の分類はその中で現れた自然な問題であり、表現論内部だけでなく放物幾何などに置いても重要な意味を持つ。最終的には一般化された Verma 加群の間の準同型を解明することが本研究の目標となる。特にスカラー型の場合は基本的には今までの研究の自然な継続として１において提示した予想を解き分類を完成させるのが最終目標である。ただしこれまで用いていた手法だけではこれ以上進むのは難しいと考えられるのでランク２の場合など具体的な場合を考察し ad hoc な議論を精査することを考えた。　一般の場合はさらに難しく、ほとんど何も分かってない状況なので、現実

的な問題設定として準同型の空間の次元を上から評価することを試みた。

３．研究の方法

結果が得られるなら手段には拘らないのは当然であるが，　代数的な手法の適用が中心となる。その中で主なものを以下に挙げておく。

(1) translation principle
有限次元表現とのテンソル積を考えて普遍包絡環の中心が適切に作用する部分を切り出す操作は関手を与え translation functor と言われる。適切な条件のもとでスカラー型の一般化された Verma 加群は translation functor はやはり別のパラメーラーに対応するスカラー型の一般化された Verma 加群に移される。関手なので準同型も対応して存在することになる。このことは色々な場面において使える有力な手法であるが、これまでに得られた結果を得るにあたってて極めて有効に機能した。戦略としては一般の場合をパラメーターが退化した比較的に簡単な場合に帰着させるというものである。

（2）　translation functor による他の Weyl chamber への移送
translation functo r によりパラメーターが他の Weyl chamber に移る場合スカラー型の一般化された Verma 加群はもはやスカラー型の一般化された Verma 加群にはならないが filtration で successive quotient がスカラー型とは限らない一般化された Verma 加群になるようなものが存在する。　このことを用いてスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型が存在すると仮定し矛盾を導き出せる場合がある。 ただし現状は（1）のような組織的なものではなく、ad hoc な手法にとどまっている。

（3）スカラー型の一般化された Verma 加群の普遍包絡環における annihilator の比較
分類において一つのカギになるのはスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型が存在するためには、放物型部分代数から自然に定まるある種の Weyl 群の作用でパラメータが移りあうことが必要になることである．これは対応するスカラー型の一般化された Verma 加群の普遍包絡環における annihilator が一致しないことを示せばそれから従うが gl(n,C)の場合には Borho-Jantzen の結果が有り、それが分類の完成のための重要なステップになっている。

（4）スカラー型の一般化された Verma 加群の極大部分加群の比較
スカラー型一般化された Verma 加群は一意に定まる極大部分加群を持つ。自明でないスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型は常に単射であるので極大部分加群の異なるスカラー型の一般化された Verma 加群の間には自明でない準同型は存在しないことになる。極大部分加群は Kazhdan-Lusztig 理論から原理的に決定できるのではあるがランクが大きな場合は具体的な結果を出すのには現実的ではない。現状は ad hoc なやり方で極大部分加群がわかる場合もあるという状況である。

（5）Soergel のカテゴリーO のコクセター系による特徴づけ
カテゴリーO とは一般化された Verma 加群を含む g を複素簡約 Lie 代数のあるクラスの加群のなすカテゴリーであり、重要な数学的対象である。Soergel はカテゴリーO の各ブロックは integral Weyl group によって定まることを示した。　これにより一般化された Verma 加群の間の準同型の存在問題を異なるより簡単な簡約リー代数の対応する問題に帰着することができる。

（6）Jantzen の既約性判定条件
一般化された Verma 加群の既約性が判定できるので例えばターゲットになっている加群が既約なら自明な準同型しかないことがわかる。
これは translation principle により特別な退化したパラメーターに帰着した場合に有効なことが期待できる。

４．研究成果

(1)　一般の場合に準同型の空間の次元を上から評価する結果としていかのようなものを得た。

定理　g を複素簡約リー代数、p をその放物型部分代数とし U(g), U(p)でそれらの普遍包絡環を表す。V_1, V_2 を p の既約有限次元表現とし、i=1,2 に対し一般化バルマ加群 M_i を U(p)-加群　V_i から U(g)-加群への係数拡大として定義する。　このとき M_1 から M_2 への U(g)-加群の準同型のなす空間の次元は dim V_1 dim V_2 で上から押さえられる。

この結果はスカラー型つまり dim V_1=dim V_2=1 の場合の Lepowsky の結果の一般化になっている。この結果自体で得られる評価だと　ｇ　および　ｐを与えたとき V_1, V_2 の次元はいくらでも大きくできるが、実は上記３ー（５）で論じた Soergel の結果を組み合わせれば各　ｇ, p に対して有限個の V_1, V_2 を参照すればよいことになり　ｇ, p のみに依存する準同型のなす空間の次元の具体的な上からの評価が得られる。　各　g　に対するｐは内部自己同型による共役を除いて有限個なので結局　g のみに依存する評価も得られる。　ただし　同じ古典群の系列で比較するとそのランクに依存する評価になる。

上記の Boe-Enright-Shelton の結果によればｐの nilradical が可換であるような場合には準同型のなす空間の次元は高々１であることが知られているが、この結果の評価であるがランクに依存して大きくなる数で上から押さえることになるので残念ながらベストポッシブルではない。

（２）　スカラー型の場合に種々の具体例についてＦ_4 型単純リー代数の場合に上記３において説明した手法を用いて上述の予想をチェックした。elementary な準同型が存在しないケースについて場合分けを行い各場合について準同型の非存在を示して行くのだが現時点では反例は見つかっていない。上述の３における手法のうち（２）以外で排除出来ない場合が問題だが、（２）のような ad hoc なやり方でできる場合もあるのだが、現時点では結果をすっきりと述べられるような形には残念ながらなっていはいない。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 松本久義
２．発表標題 一般化バルマ加群をめぐって
３．学会等名 表現論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Hisayosi Matumoto
２．発表標題 On the homomorphisms between scalar generalized Verma modules for complex simple Lie algebras of type B and C
３．学会等名 International Symposium on“ Advances and Perspectives in Representation Theory ”（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hisayosi MATUMOTO
２．発表標題 On homomorphisms between scalar generalized Verma modules for complex simple Lie algebras of type B and C
３．学会等名 Representation theory of reductive Lie groups and algebras（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関