様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　６ 月　６ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2021
課題番号：１８Ｋ０３３２３

研究課題名（和文）パンルヴェ方程式を中心とした可積分系の研究

研究課題名（英文）Research of integrable systems around the Painleve equations

研究代表者
坂井　秀隆（Sakai, Hidetaka）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：５０３２３４６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題に関係して，論文1本を学術誌に発表し，別の論文を準備中である．
　発表されている論文は，東京大学の間瀬崇史氏，城西大学の中村あかね氏との共同研究で，離散パンルヴェ方程式に対する離散ハミルトニアンというものを提案し，それを使うと方程式が簡単に書けることを示した．
　準備中の論文は，東京大学の細井竜也氏との共同研究で，t = 0, 1, 無限大のみを特異点に持ち，そのいずれもがH型である4階斉次2次微分方程式の形を(簡単なある仮定の下) 決定した．これは第6パンルヴェ方程式の双線型形式を含むものである．

研究成果の学術的意義や社会的意義
パンルヴェ6型方程式は非常に複雑な形をした方程式であり，その具体形を何らかの特徴づけから求めるのには大変な計算を要することが多い．細井氏との共同研究の結果は，特異点の近くにおける方程式の局所的な様子だけから方程式を決定できるという意味で，フックス型線型微分方程式における超幾何微分方程式の特徴づけを想起させ，面白い事象だと思う．

研究成果の概要（英文）：In this research project, one paper has been published in an academic journal and another paper is in preparation.
 In the published paper, in collaboration with T. Mase and A. Nakamura, we proposed a discrete Hamiltonian for the discrete Painleve equation and showed that the equation can be easily written by using it.
 The paper being prepared is a joint research with T. Hosoi. We determined the form of a fourth-order homogeneous quadratic differential equation (under some simple assumption) that has only t = 0, 1, infinity as singular points, all of which are of type (H). It contains the bilinear form of the 6th Painleve equation.

研究分野：特殊函数論

キーワード：パンルヴェ方程式　差分方程式　特殊函数　超幾何函数

１．研究開始当初の背景

研究領域は非線型可積分系といわれる分野である．非線型の函数方程式については，線型の同様な問題と比べて有効な一般論を構築することが難しい．解となる函数の具体的な性質にいたっては，代数函数や超幾何函数などのよく知られた特殊函数によって具体的に記述できる特別な場合を除くと，なかなか解析ができないのが現状である．一方で，楕円函数，超幾何函数などの特殊函数によってひとたび記述されてしまえば，劇的にいろいろな計算が可能となってくる．

楕円函数などのよく知られた特殊函数とは別の新しい特殊函数を作ろうという試みは当然のもので，パンルヴェ方程式はこのような意図の下，二十世紀はじめに発見された．パンルヴェらは，動く特異点は極だけであるという条件を課した場合の正規形 2 階代数的常微分方程式の分類を行い，新しい特殊函数を定義する非線型非自励の方程式としてパンルヴェ方程式を提案したのである．

同じ頃，パンルヴェ方程式は，線型微分方程式の変形理論にも現れた．これは，R．フックスの研究である．4 つの特異点を持つフックス型方程式が，モノドロミーを変えずに特異点の位置を動かすときに，方程式の係数が満たす方程式が第 6 パンルヴェ方程式である．このような方程式の変形を，一般に，モノドロミー保存変形と呼んでいる．この視点は，後述する最近の超越解の構成にも，重要な視点を与えている．

さらに，パンルヴェの方程式は，1970 年代の Wu 氏らによる可解格子模型の相関函数の記述などに数理物理への応用を見出した．純粋に数学的な動機から構成されたパンルヴェ方程式が，物理学の重要な問題への解答を与えたことは驚きをもって迎えられた．数学においても，岡本和夫氏による初期値空間の構成，アフィン・ワイル群対称性の定式化，更に，梅村浩氏の微分ガロア理論を用いた既約性の証明と盛んに研究されてきた．

2012 年以降，パンルヴェ方程式の研究環境は非常に変わった．パンルヴェ方程式の超越解の具体的な表示が Lisovyy 氏らによって得られ，それが重要な意味を持つということが分かってきたからである．この具体的な表示というのは，パラメーターに関するフーリエ級数展開の形で与えられ，その係数はヤング図形の組によってラベルづけされるネクラソフ因子と呼ばれる式によって書けてしまう．これまでの研究は，特殊函数の研究というよりは特殊方程式の研究であるという側面は否めず，解そのものの解析という面では，一部そのような研究はあったものの，十分ではなかったと言えるだろう．それがここに来て，大きな環境の変化に至りそうだということである．

２．研究の目的

本研究課題では，非線型系の中でも可積分系の重要なクラスであるパンルヴェ方程式とその様々な拡張をテーマとしている．パンルヴェ方程式の拡張としては，多変数化，高次元化，離散化を念頭に置いている．

具体的な目標として，パンルヴェの 6 型方程式に関して Lisovyy らによって得られた超越解の具体的表示を手がかりとし，1. 超越解の表示を他の方程式の解に対しても求めること，2. 超越解の解析的性質の研究を目指す．

３．研究の方法

(1)アイディアを思いつくための数学的対象に関する思考実験，計算，文献調査，(2)共同研究者との議論，アイディアの交換，(3)国内外の研究者たちとの交流，議論．とくに，セミナー，研究集会などに多く参加すること．人に話をすること，人の話を聞くこと．

研究目的を達成するにあたり，国内外の研究者との研究交流を最も大事なものと考えている．国内外の研究集会に参加することなども含め，共通の問題意識の交換をはかり，柔軟な研究手法で研究を遂行することを目指した．

しかし，新型コロナウィルスの蔓延のため，後半は，関係する研究者との議論はオンラインを除いて十分には行えなかった．最後に 2022 年 3 月の熊本大学における研究集会で議論ができてよかった．

４．研究成果

(1) 東京大学の細井竜也氏との共同研究で，A study on the bilinear equation of the sixth Painleve transcendents というタイトルの論文を準備中である．

実はこれまでのところ，リゾヴィーらによる第 6 パンルヴェ方程式の級数解は，級数の収束も分からないままであった．ところが，2021 年の細井竜也氏の修士論文において，級数の（原点近傍における）収束が示された．細井氏の結果は，パンルヴェ方程式に限らず，函数の満たす双線型方程式（正確には斉次 2 次微分方程式）の特異点における最低次の項の形がある条件を満たすという仮定の下に示されたものであった．この仮定を満たす斉次 2 次微分方程式を，特異点において H 型であると呼ぶことにする．

そこで，坂井と細井氏は，t = 0，1，無限大のみを特異点に持ち，そのいずれもが H 型である

4 階斉次 2 次微分方程式の形を(簡単なある仮定の下) 決定した. これは第 6 パンルヴェ方程式(の双線型形式) を含むものである.
　パンルヴェ 6 型方程式は非常に複雑な形をした方程式であり, その具体形を何らかの特徴づけから求めるのには大変な計算を要することが多い. 今回の結果は, 特異点の近くにおける方程式の局所的な様子だけから方程式を決定できるという意味で, フックス型線型微分方程式における超幾何微分方程式の特徴づけを想起させ, 面白い事象だと思う.

(2) 東京大学の間瀬崇史氏, 城西大学の中村あかね氏との共同研究の結果として, Discrete Hamiltonians of discrete Painlev¥'e equations というタイトルの論文を執筆し, 学術誌に発表した.
　この論文では, 離散パンルヴェ方程式に対する離散ハミルトニアンというものを提案し, それを使うと方程式が簡単に書けることを示した. 離散ハミルトニアンは, 従属変数, 独立変数やパラメーターの対数函数や 2 重対数関数を用いて書かれる. タウ函数との関係に興味があるのだが, 対応に関しては, 次の課題だと思っている.
　研究目的との関係を簡単に述べたい. 研究目的の中に, 超越解の表示を他の方程式にも求めることを挙げていたが, q 差分の場合には, これは, 2017 年に出版されている神保氏, 名古屋氏との共同研究において構成できたものがある. しかし, これはまだ形式級数解であって, 収束については議論が行われていない. 上の(1)で述べた細井氏の収束証明の類似を考えたいのだが, q 差分の場合には, 級数解が双線型方程式を満たすことが示せていないという問題がある. 微分方程式の場合と並行した議論をするためにハミルトン形式の離散類似を考えたという動機がある. しかし, これが目論み通り, 級数解の収束を示すために使えるかはまだわからない.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Mase Takafumi、Nakamura Akane、Sakai Hidetaka	４．巻 29
２．論文標題 Discrete Hamiltonians of discrete Painleve equations	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Annales de la Faculte des sciences de Toulouse : Mathematiques	６．最初と最後の頁 1251～1264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/afst.1660	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　5件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 坂井秀隆
２．発表標題 Painleve 方程式の世界
３．学会等名 日本数学会，秋季総合分科会，函数方程式論分科会特別公演（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 坂井秀隆
２．発表標題 Painleve 超越函数と共形場理論
３．学会等名 2020年度表現論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Sakai, Hidetaka
２．発表標題 Discrete Hamiltonians of discrete Painlev\'e equations (Joint work with T. Mase and A. Nakamura)
３．学会等名 Integral Systems Workshop 2019（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

1．発表者名 Sakai, Hidetaka
2．発表標題 CFT approach to the q-Painleve equations (joint work with M. Jimbo and H. Nagoya)
3．学会等名 Asymptotic, Algebraic and Geometric Aspects of Integral Systems（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Sakai, Hidetaka
2．発表標題 CFT approach to the q-Painleve equations (joint work with M. Jimbo and H. Nagoya)
3．学会等名 可積分系理論から見える数理構造とその応用（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 坂井秀隆
2．発表標題 The differential equations of type (H) with 3 singular points (joint work with T. Hosoi)
3．学会等名 アクセサリーパラメーター研究会
4．発表年 2022年

〔図書〕　計1件

1．著者名 Hiroe, Kazuki and Kawakami, Hiroshi and Nakamura, Akane and Sakai, Hidetaka	4．発行年 2018年
2．出版社 Mathematical Society of Japan, Tokyo	5．総ページ数 185
3．書名 4-dimensional Painleve-type equations	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Differential Systems: from theory to computer mathematics	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関