

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03327

研究課題名（和文）散乱理論を用いた量子ウォークの弱収束定理の研究

研究課題名（英文）A study of weak limit theorem with spectral scattering theory

研究代表者

鈴木 章斗（Suzuki, Akito）

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号：70585611

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ランダムウォークの量子版である量子ウォークの長時間挙動を説明するスペクトル散乱理論を構築し、弱収束定理を証明した。主な成果は以下の通りである。(1) 1次元スプリットステップ型量子ウォークの摂動に対してロバストな固有状態の存在を証明、また弱収束定理も証明した。(2) 1次元非線形量子ウォークの弱収束定理を証明した。(3) 1次元の長距離型の摂動をもつ量子ウォークのスペクトル散乱理論を展開し、特異連続スペクトルと埋蔵固有値の非存在を証明した。(4) 2次元4状態量子ウォークの固有値とレゾナンスの存在や消失を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォークは、ランダムウォークの量子版と言われることが多いが、ディラック作用素の時空間離散化としてみることのできるため、さまざまな量子現象のシミュレーションにも応用可能である。また、量子ウォークは量子アルゴリズムにも応用可能である。そのため、量子ウォークの基本的な性質を明らかにすることは、それらの基礎研究として重要である。特に、ランダムウォークとの比較においては、長時間挙動や極限定理を調べることは、中心極限定理や大偏差原理の量子版を考えることに対応している。

研究成果の概要（英文）：A study of weak limit theorem with spectral scattering theory

We developed the spectral scattering theory of quantum walks and proved the weak limit theorems for them, most of which are the following:

(i) We proved the existence of eigenstates robust against perturbations for one-dimensional split-step quantum walks and gave proof of the weak limit theorem for them. (ii) We proved the weak limit theorem for one-dimensional nonlinear quantum walks. (iii) We developed the spectral scattering theory of one-dimensional quantum walk with long-range perturbations and proved the absence of singular continuous spectra and embedded eigenvalues. (iv) We proved the existence and dissipation of eigenvalues and resonances for two-dimensional four-state quantum walks.

研究分野：数理物理

キーワード：量子ウォーク スペクトル散乱理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

量子ウォークの研究は1次元量子ウォークにおいては盛んに研究されているものの、非線形量子ウォークや高次元の量子ウォークについての系統的な研究は多くなかった。特に、長時間挙動の解析や弱収束定理の証明は、1次元量子ウォークであっても解決な部分が多い。

### 2. 研究の目的

本研究では、さまざまな量子ウォークの長時間挙動を研究し、弱収束定理を証明することを目的とする。本研究では、特に以下のモデルを考えた。

- 1次元スプリット・ステップ量子ウォーク  
これは、1次元2状態量子ウォークを一般化したモデルであり、特にカイラル対称性をもつ場合には、カイラル対称性に保護された摂動に対してロバストな固有状態が存在することがシミュレーションによって予測されている。
- 1次元2状態非線形量子ウォーク  
これは、1次元2状態量子ウォークに非線形摂動を加えたものである。このモデルは、すくなくとも形式的には非線形ディラック粒子の時空間離散化したモデルと考えられる。
- 1次元2状態量子ウォーク  
1次元2状態量子ウォークの散乱理論は、短距離型の摂動をもつ場合には十分よく研究されているが、長距離型の摂動については、ほとんど研究が進んでいなかった。
- d次元2d状態量子ウォーク  
このタイプの量子ウォークは、固有値の存在を証明するのが難しく、散乱理論どころか、スペクトルの研究すら進んでいない。

### 3. 研究の方法

本研究では、スペクトル散乱理論をもちいて、長時間挙動を明らかにする。特に、量子ウォークのスペクトルを調べることは、長時間挙動を知るうえで基本的なことであり、固有値が存在すれば、局在化が起こることが証明される。また、散乱理論によって連続スペクトルに特異連続スペクトルが含まれず、絶対連続スペクトルのみからなることが示されれば、波動作用素を用いて、弱収束定理の証明も可能である。つまり、量子ウォークのスペクトル散乱理論を展開することは、長時間挙動を調べることにつながり、ひいては弱収束定理の証明を可能にする。

### 4. 研究成果

本研究では、量子ウォークの長時間挙動を調べるために、スペクトル散乱理論を展開し、その結果に基づいて弱収束定理を証明した。主な成果は以下の通りである。

- (1) 1次元スプリット・ステップ型量子ウォークの摂動に対してロバストな固有状態の存在を証明した。これは、カイラル対称性に守られた状態であり、長時間挙動としては、局在化という状態に対応する。またこのモデルに対する弱収束定理も証明し、極限分布を明らかにした。これは、本研究は、船川氏(北海学園大学)と布田氏(国土館大学)との共同研究である。
- (2) 1次元非線形量子ウォークの散乱理論に基づいて、弱収束定理を証明した。また、1次元非線形量子ウォークが非線形ディラック粒子に時空間連続極限で収束することを数学的に厳密に証明した。前者は、前田氏(千葉大)、佐々木氏(千葉大)、鈴木氏(茨城大)、瀬川氏(横浜国立大)との共同研究であり、後者は前田氏(千葉大)との共同研究である。
- (3) 1次元の長距離型の摂動をもつ量子ウォークのスペクトル散乱理論を展開し、特異連続スペクトルと埋蔵固有値の非存在を証明した。ここでは、作用素論的に波動作用素を構築する方法ではなく、解析的な方法を用いた。すなわち、ヨスト解と呼ばれる一般化固有状態

を構成し、その性質を用いて証明を行う。これは、前田氏（千葉大）と和田氏（北海道教育大）との共同研究である。

(4) パラメータをもつ2次元4状態量子ウォークを考え、そのパラメータに応じて固有値が現れたり、レゾナンスに変容して、固有値が消失したりするような数学的仕組みを解明した。これは、笹山氏（北海道情報大）、船川氏（北海学園大学）、布田氏（国士舘大学）との共同研究である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Maeda Masaya, Suzuki Akito, Wada Kazuyuki	4. 巻 -
2. 論文標題 Absence of singular continuous spectra and embedded eigenvalues for one-dimensional quantum walks with general long-range coins	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X22500167	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Masaya Maeda, Hironobu Sasaki, Etsuo Segawa, Akito Suzuki and Kanako Suzuki	4. 巻 -
2. 論文標題 Dispersive estimates for quantum walks on 1D lattice	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Suzuki Akito, Tanaka Yohei	4. 巻 18
2. 論文標題 The Witten index for 1D supersymmetric quantum walks with anisotropic coins	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 377
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/S11128-019-2485-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Suzuki Akito	4. 巻 18
2. 論文標題 Supersymmetry for chiral symmetric quantum walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 363
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/S11128-019-2474-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maeda Masaya, Suzuki Akito	4. 巻 32
2. 論文標題 Continuous limits of linear and nonlinear quantum walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2050008 ~ 2050008
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129055X20500087	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maeda Masaya, Sasaki Hironobu, Segawa Etsuo, Suzuki Akito, Suzuki Kanako	4. 巻 3
2. 論文標題 Dynamics of solitons for nonlinear quantum walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics Communications	6. 最初と最後の頁 075002 ~ 075002
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/2399-6528/AAFE2C	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Segawa Etsuo, Suzuki Akito	4. 巻 18
2. 論文標題 Spectral mapping theorem of an abstract quantum walk	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 333
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/S11128-019-2448-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fuda Toru, Funakawa Daiju, Akito Suzuki	4. 巻 64
2. 論文標題 Weak limit theorem for a one-dimensional split-step quantum walk	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 REVUE ROUMAINE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES	6. 最初と最後の頁 157-165
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fuda Toru, Funakawa Daiju, Suzuki Akito	4. 巻 59
2. 論文標題 Localization for a one-dimensional split-step quantum walk with bound states robust against perturbations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 082201 ~ 082201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5035300	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maeda Masaya, Sasaki Hironobu, Segawa Etsuo, Suzuki Akito, Suzuki Kanako	4. 巻 17
2. 論文標題 Weak limit theorem for a nonlinear quantum walk	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 215:1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11128-018-1981-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 田中洋平、鈴木章斗
2. 発表標題 一次元二相系量子ウォークのウィッテン指数
3. 学会等名 日本数学会 2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺西功哲、佐々木格、鈴木章斗、船川大樹、松澤泰道
2. 発表標題 時間作用素の不足指数とスペクトル
3. 学会等名 日本数学会 2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤溪、鈴木章斗、成松明廣、布田徹
2. 発表標題 サイクル上の量子ウォークにおける発生の固有空間と長時間挙動
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成松明廣、齋藤溪、鈴木章斗、布田徹
2. 発表標題 多次元格子 1 欠陥量子ウォークのスペクトル
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船川大樹、浅原啓輔、田中洋平、鈴木章斗
2. 発表標題 非ユニタリな量子ウォークのスペクトル 1 – 望月・金・小布施模型 –
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 浅原啓輔、船川大樹、瀬川悦生、鈴木章斗、寺西功哲
2. 発表標題 非ユニタリな量子ウォークのスペクトル 2 – 伊原ゼータへの応用 –
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木 章斗
2. 発表標題 カイラル対称なユニタリ作用素の超対称性
3. 学会等名 日本数学会 2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 齋藤溪、鈴木章斗、成松明廣、布田徹
2. 発表標題 サイクル上の split-step 量子ウォークの長時間挙動
3. 学会等名 日本数学会 2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 浅原啓輔、船川大樹、瀬川悦生、鈴木章斗、寺西功哲
2. 発表標題 非ユニタリな量子ウォークにおけるスペクトル写像定理
3. 学会等名 日本数学会 2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 船川大樹、布田徹、笹山智司、鈴木章斗
2. 発表標題 2次元スプリットステップ量子ウォークのレゾナンスについて
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 寺西功哲、佐々木格、鈴木章斗、船川大樹、松澤泰道
2. 発表標題 ユニタリ作用素に対する時間作用素
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関