

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03329

研究課題名(和文) 磁場付きシュレディンガー作用素の特異極限と関連する不等式の研究

研究課題名(英文) Singular limit of the magnetic Schroedinger operators and related inequalities

研究代表者

峯 拓矢 (Mine, Takuya)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授

研究者番号：90378597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：岩塚、島田と研究代表者との共同研究(2009)におけるトーラス型磁場付きシュレディンガー作用素の太さ0極限におけるノルム解核収束の証明中で、磁場付き Rellich の不等式を援用することで証明が改良ができることを確認した。トレース族のノルムでの収束の証明も検討したが、完成には至らなかった。この課題については、引き続き検討を行っている。

一方、特異相互作用に関連する未解決問題である「Poisson 型ランダム点相互作用をもつシュレディンガー作用素の自己共役性」に関して、中野、神永との共同研究でこれを解決し、同作用素のスペクトル構造、および積分された状態密度の漸近挙動の決定を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

磁場付きシュレディンガー作用素の特異極限に関する結果はまだ完成に至らなかったが、磁場付き Rellich の不等式の応用により証明が改良されることは確認されたため、その手法を洗練させることにより、関連する方程式の解析への応用が期待される。一方で、「ポアソン点相互作用をもつシュレディンガー作用素の自己共役性」に関する結果は、この作用素を解析する際の基礎を築いたという意味で重要な貢献と言える。この作用素の解析では、数値計算によるシミュレーションが比較的容易であり、パーコレーション理論などの確率論諸分野とも関連するため、確率論的手法を援用することにより、さらなる発展が見込まれている。

研究成果の概要(英文)：In Iwatsuka, Shimada, and I (2009), we prove that the Schroedinger operator with the magnetic field enclosed in a torus converges in the norm resolvent sense to some limit operator, as the thickness of the torus tends to 0. We try to improve their proof, and make sure that the use of the magnetic Rellich inequality simplifies their proof. We also try to prove the trace class convergence in the above limit, but it is incompleted yet.

Related with this issue, we study an open problem 'the self-adjointness of the Schroedinger operator with the Poisson random point interaction', and solve it affirmatively, in cooperation with F. Nakano and M. Kaminaga. About this operator, we also determine the structure of the spectrum, and the asymptotic behavior of the integrated density of states.

研究分野：スペクトル・散乱理論

キーワード：数理物理学 大域解析学 量子力学 スペクトル・散乱理論 アハラノフ・ボーム効果 点相互作用

## 1. 研究開始当初の背景

2 または 3 次元ユークリッド空間内の非自明な基本群をもつ領域においては、磁場  $B$  が 0 であっても、ベクトル・ポテンシャル  $A$  が 0 でなければ、対応する磁場付きシュレディンガー作用素の散乱振幅には観測可能な影響が現れる場合がある。Aharonov-Bohm [Ah-Bo]において指摘されたこの事実は Aharonov-Bohm 効果と呼ばれ、関連する数学的散乱理論は田村英男らにより発展させられている。特に「有限の太さをもつソレノイドの太さが 0 に収束する極限を取ったとき、散乱振幅等の諸物理量が、太さが 0 のときの極限作用素の対応物に収束するか？」という問題は、田村[Ta1,Ta2]により肯定的に解決されていた。

一方、Aharonov-Bohm 効果の検証実験として、外村彰ら[To]によるトーラス型の超伝導体に閉じ込められた磁場を用いた電子の散乱実験が有名であるが、研究代表者は 2017 年の研究集会において、3 次元空間内の太さ 0 の輪の中に閉じ込められた磁場の磁束の値が量子化されている(つまり、磁束量子  $h/(2e)$ の整数倍である)とき、対応する特異磁場に対する極限作用素は扁平回転楕円体座標を用いれば可解であり、散乱振幅や入射平面波を具体的に計算できることを発表した[Mi1]。この結果を用いれば、外村らによる実験結果と類似の図を数学的に再現できる。このとき、「太さ 0 のトーラス磁場に対応する散乱振幅は、0 のとき、太さ 0 の輪磁場に対応する散乱振幅に収束するか？」という問題は数学的に自然であり、また現実のトーラス磁場を用いた実験結果と比較する上でも重要な問題である。

一方、磁場付きシュレディンガー作用素  $H$  に関連する重み付き分散型評価は Grillo-Kovarik [Gr-Ko], Fanelli-Grillo-Kovarik [Fa-Gr-Ko]らにより盛んに研究されており、2 次元では時間減衰の中に全磁束と整数との距離が現れる興味深い結果が得られている。上記の論文では限定された形の磁場のみを扱っているため、「一般の磁場に対する重み付き分散型評価を示す」問題は興味深い問題と言える。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、次の 2 つである。

- (i) 磁場が空間内の低次元多様体に集中する特異極限における散乱作用素・散乱振幅の収束を示し、それらの量の収束のパラメータに関する漸近展開を求める。
- (ii) 特異磁場を含む一般の磁場を持つ磁場付きシュレディンガー作用素に対する分散型評価、および Hardy 型不等式、Rellich 型不等式などの関連する不等式を示す。

## 3. 研究の方法

問題(i) について、まずは上に述べたトーラスが太さ 0 の輪磁場に収束する特異極限に関する詳細な解析を行い、散乱振幅の漸近挙動を調べる。このとき参考になるのは、2 次元で磁場が半径 0 の点磁場に収束する場合に散乱振幅の漸近挙動を求めた田村[Ta1, Ta2]の結果、および 3 次元で磁場が太さ 0 の輪磁場に収束する場合にノルム解核収束を示した岩塚、島田と研究代表者との共同研究[lw-Mi-Sh]である。前者では解核作用素  $(H-z)^{-1}$  の低エネルギー極限 ( $z \rightarrow 0$ ) における漸近挙動が本質的な役割を果たし、後者では磁場付き Hardy 型不等式が鍵となる。この両者の評価を組み合わせることで精密化することにより、上記の特異極限問題の研究を行う。特に研究代表者の結果[Mi1]で扱った、磁束が量子化された太さ 0 の輪磁場の場合には、解核作用素の扁平回転楕円体波動関数を用いた具体的な表示が得られており、その関数を詳細に解析することにより散乱振幅の漸近挙動を解析する。磁束の量子化条件が無い場合にも Aharonov-Bohm ansatz と呼ばれる解の近似法が Ballesteros-Weder [Ba-We]において示されており、それを用いれば解核作用素の近似を構成できる。これらの研究が終了後に一般化の可能性を検討し、一般の次元・一般的な特異性を持つ磁場への特異極限の問題も研究していく。

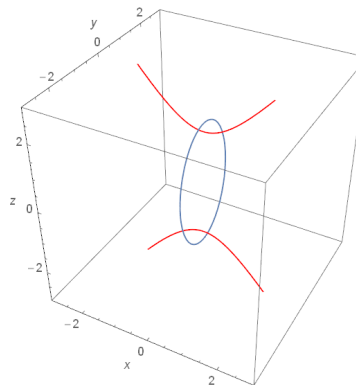
Jensen-Kato[Je-Ka]によれば、シュレディンガー作用素の重み付き分散型評価の問題においても解核作用素  $(H-z)^{-1}$  の低エネルギー極限での解析が鍵となる。この意味で問題(ii) は必然的に(i) と関わっており、同時進行的に研究を進めていく。解核作用素  $(H-z)^{-1}$  の解析では Hardy, Rellich 型不等式を用いるが、磁場付きシュレディンガー作用素に関するこれらの不等式は近年盛んに研究されている(Balinsky-Evans-Lewis[Ba-Ev-Le]など)。また、Metafunne-側島-Spina [Me-So-Sp]によれば、-2 次斉次な作用素に対する Hardy, Rellich 型不等式はある種の変数変換・未知関数の置換により非自己共役作用素のスペクトルと密接に関わっている。この仮定を多少変更して、例えば 2 次元で磁場が動径方向の関数となっている場合を考えると、現れる非自己共役作用素のスペクトルには、ある領域を埋め付く非可算無限個の固有値や剰余スペクトルなどの複雑なスペクトル構造が現れることが分かっている。この方面の研究も併せて進めていく。

## 4. 研究成果

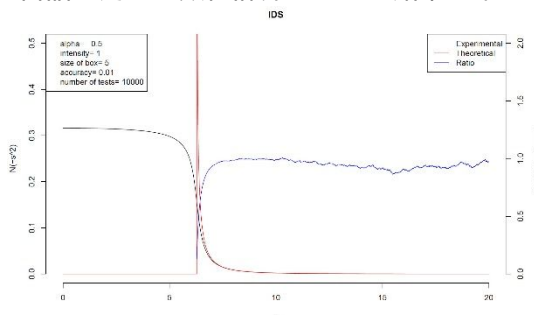
3 次元空間内のトーラス内に閉じ込められた磁場をもつシュレディンガー作用素について、磁場の太さが 0 に収束する極限における極限作用素の存在、およびノルム解核収束については、岩

塚、島田と研究代表者による共同研究[lw-Mi-Sh]において示されていたが、証明中で磁場付き Hardy 不等式を用いる部分についての議論がやや込み入ったものとなっており、改良が期待されていた。この部分について、研究代表者は Balinsky-Evans-Lewis[Ba-Ev-Le]により得られた磁場付き Rellich の不等式を用いると、ノルム解核収束の証明が単純化されることを確かめた。さらに、解核収束をトレース族における収束に改良できれば、散乱振幅などの物理量の収束が示されるが、この証明は完成には至らなかった。

さらに、研究代表者は、3次元空間内の太さ0の輪磁場について、輪の中の磁束が量子化された場合は定常シュレディンガー方程式が可解となることを示し、波動関数や散乱振幅を具体的に計算した[Mi1]。この可解模型に関する一般化も試みた。その結果、3次元空間内で Jacobi の楕円関数で記述された一般楕円体座標を用いると、太さ0の楕円ソレノイド、およびその焦点を通過する太さ0の双曲線ソレノイド内に磁場があり、その磁束が量子化されている模型(右図)も可解であることが確かめ、2019年に沖縄で行われた研究集会において発表した。この場合、固有方程式を変数分離法で解くと、3つの同型の常微分方程式(楕円体微分方程式)に関する多重パラメータ・スペクトル問題が導かれる。その連立常微分方程式系の解析には困難な部分があり、波動関数の具体的な数値計算にはまだ至っていない。



また、特異相互作用に関連する研究として、当時未解決問題であった「ポアソン型ランダム点相互作用をもつシュレディンガー作用素の自己共役性」にも着手し、中野史彦、神永正博と共同でこれを解決した後、スペクトル構造の決定にも成功し、結果を論文として出版した[Ka-Mi-Na]。さらに、この作用素の積分された状態密度(integrated density of states, IDS)の負の無限大における漸近挙動について、主要項を決定し、R言語を用いた数値計算によって結果を確かめた。これについては、2021年3月に行われた日本数学会年会における特別講演において結果を発表した[Mi2]。さらに証明に改良を加え、現在では主要項に加えて第2項までを与える結果を導き、R言語を用いた数値計算による検証を行った(右図)。これについても、現在中野・神永と共同で論文を作成中である。



## 参考文献

- [Ah-Bo] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, Phys. Rev. 115 (1959) 485-491.
- [Ba-Ev-Le] A. A. Balinsky, W. D. Evans, and R. T. Lewis, The analysis and geometry of Hardy's inequality, Universitext, Springer, 2015.
- [Ba-We] M. Ballesteros and R. Weder, The Aharonov-Bohm effect and Tonomura et al. experiments: rigorous results. J. Math. Phys. 50 (2009), no. 12, 122108, 54 pp.
- [Fa-Gr-Ko] L. Fanelli, G. Grillo, and H. Kovarik, Improved time-decay for a class of scaling critical electromagnetic Schrödinger flows, J. Funct. Anal. 269 (2015), no. 10, 3336-3346.
- [Gr-Ko] G. Grillo and H. Kovarik, Weighted dispersive estimates for two-dimensional Schrödinger operators with Aharonov-Bohm magnetic field, J. Diff. Eq. 256 (2014), no. 12, 3889-3911.
- [lw-Mi-Sh] A. Iwatsuka, T. Mine, and S. Shimada, Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, in Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic Systems, Contemporary Mathematics 500 (2009), AMS, 139-152.
- [Je-Ka] A. Jensen and T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time decay of the wave functions, Duke Math. 46 No. 3 (1979), 583-611.
- [Ka-Mi-Na] M. Kaminaga, T. Mine, and F. Nakano, A self-adjointness criterion for the

- Schrödinger operator with infinitely many point interactions and its application to random operators, *Ann. Henri Poincaré* 21(2020), no.2, 405-435.
- [Me-So-Sp] G. Metafune, M. Sobajima, and C. Spina, Weighted Calderon-Zygmund and Rellich inequalities in  $L^p$ , *Math. Ann.* 361 (2015), no. 1-2, 313-366.
- [Mi1] T. Mine, Solvable models in the scattering theory for the Aharonov-Bohm effect, *数理解析研究所講究録* 2074 (2018), 68-79.
- [Mi2] 峯 拓矢, Schrödinger operators with point interactions, 日本数学会 2021 年度年会 函数解析学分科会講演アブストラクト (2021), 13-25.
- [Ta1] H. Tamura, Magnetic scattering at low energy in two dimensions, *Nagoya Math. J.* 155 (1999), 95-151.
- [Ta2] H. Tamura, Norm resolvent convergence to magnetic Schrödinger operators with point interactions, *Rev. Math. Phys.* 13 (2001), no. 4, 465-511.
- [To] A. Tonomura et al., Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave, *Phys. Rev. Lett.* 56, No. 8 (1986), 792-795.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masahiro Kaminaga, Takuya Mine and Fumihiko Nakano	4. 巻 21
2. 論文標題 A Self-adjointness Criterion for the Schroedinger Operator with Infinitely Many Point Interactions and Its Application to Random Operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 405-435
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00023-019-00869-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 峯 拓矢	4. 巻 2074
2. 論文標題 Solvable models in the scattering theory for the Aharonov-Bohm effect	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 68-79
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 峯 拓矢	4. 巻 -
2. 論文標題 Schroedinger operators with point interactions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学会2021年度年会函数解析学分科会講演アブストラクト	6. 最初と最後の頁 13-25
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Takuya Mine
2. 発表標題 Schroedinger operators with random point interactions
3. 学会等名 スペクトル散乱理論とその周辺（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 峯 拓矢
2. 発表標題 Schroedinger operators with point interactions
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuya Mine
2. 発表標題 Poisson point interactions in a constant magnetic field
3. 学会等名 Schroedinger Operators and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takuya Mine
2. 発表標題 Integrated density of states for the Poisson point interaction
3. 学会等名 Spectra of Random Operators and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 峯 拓矢
2. 発表標題 Recent development of solvable models for Aharonov-Bohm type magnetic fields
3. 学会等名 筑波RCMS解析学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Mine
2. 発表標題 IDS of the Schroedinger operators with Poisson point interactions
3. 学会等名 The 19th Linear and Nonlinear Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

京都工芸繊維大学研究者総覧 <a href="https://www.hyokadb.jim.kit.ac.jp/top/ja.html">https://www.hyokadb.jim.kit.ac.jp/top/ja.html</a>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------