2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号： １４４０１

研究種目： 基盤研究(C) (一般)

研究期間： 2018～2022

課題番号： １８Ｋ０３３３０

研究課題名（和文）モンテカルロ積分における困難事象の解決のための研究

研究課題名（英文）Research for solution of difficult cases in Monte Carlo integration

研究代表者

杉田　洋（Sugita, Hiroshi）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：５０１９２１２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：(1) k-独立確率変数列の生成：mビットのランダムなN個のサンプルで任意のk項が独立であるものを実用上最も小さいランダムな種から構成する方法を開発した．これをモンテカルロ積分における安全な疑似乱数として利用した．
(2) ブラウン運動に関わる確率変数の分布の数値計算：2次元のブラウン運動の一次元部分空間への到達時刻のように平均が無限大の確率変数の分布の計算，1次元ブラウン道の局所時間の分布の計算，など非常に困難な数値計算を行う手法を開発した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
学術的意義：(1) k-独立確率変数列の生成：2-独立確率変数列は標本平均の分散を制御できるのでモンテカルロ積分に適しているが，3次以上のモーメントを制御できないので小さい確率であるが誤差が巨大になる恐れがある．本研究で得られた4-独立確率変数列を用いれば標本平均の4次モーメントまで制御でき，誤差が巨大になることは事実上起きない．そのためこれをモンテカルロ積分に用いることを推奨する．
(2) ブラウン運動に関わる確率変数の分布の数値計算：確率解析において基本的な確率変数でも数値計算では非常に厄介な問題が数多く存在する．本研究ではその中で基本的なものについて解決の糸口を見出した．

研究成果の概要（英文）：(1) Generation of k-independent random sequence: We developed a method to construct k-wise independent random sequence of length N consisting of m-bit samples from virtually smallest random seed. We applied the sequence as secure pseudorandom sequence to Monte-Carlo integrations.
(2) Numerical computation of distribution of random variables arising from Brownian motion: We developed some numerical methods to compute very difficult distributions of random variables, such as the hitting time of 2-dim. Brownian motion to 1-dim subspace, which has no mean, and local time of 1-dim. Brownian motion.

研究分野： Probability theory

キーワード： モンテカルロ積分　ランダム・ワイル・サンプリング　対独立確率変数列　k-独立確率変数列　ブラウン運動

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1　研究開始当初の背景

モンテカルロ法とは確率変数のランダムなサンプリングを計算機を用いて行うことによって問題を数値的に解く手法をいう．なかでもモンテカルロ積分とは，確率変数の期待値をコンピュータによって生成される多数のサンプルの平均でもって推定する数値計算法をいう．科学技術的意図を持ったモンテカルロ法のほとんどはモンテカルロ積分と言って過言でない．

ランダムなサンプリングには疑似乱数を用いる．広く用いられている疑似乱数 (例えばメルセンヌ・ツイスター (MT)) には安全性がない．安全性のない疑似乱数を用いることはランダムサンプリングの結果が数学的には信頼できないものであることを意味する．モンテカルロ積分に関しては決定論的な準乱数 (low discrepancy 列) による安全な方法が存在するが，確率変数をルベーグ確率空間上で実現したとき全変動が小さいことが必要で適用範囲が極めて限られている．

じつはモンテカルロ積分に関しては，分散を持つ模倣可能な任意の確率変数に対して適用できる安全な疑似乱数生成器「(動的) ランダム・ワイル・サンプリング ((D)RWS) が存在する ([7, 8])．(D)RWS の優秀性は数学的に明らかであるが，専門的な確率論的議論が障害となっていて一般の理解が広まるには相当の時間が必要なこともあり，未だ広く普及していないことは遺憾である．

2　研究の目的

以上の背景を鑑み，モンテカルロ積分のための安全な疑似乱数生成器「(動的) ランダム・ワイル・サンプリング ((D)RWS)」による計算を特に困難な事象において活用することを本研究の目的とした．本研究の成果次第では，(D)RWS が理論的に優秀と認められるばかりでなく，応用面でも優秀であることを訴えることができると考えた．

困難な事象とは何か．本研究申請当時は，期待値を求めたい確率変数について，(1) そもそも期待値が存在するか，(2) 期待値は存在するが分散が存在しない場合，(3) 標準偏差が期待値より相対的にきわめて大きい場合，を想定していた．しかし，研究を進めるに伴い，一般的な場合について論じるよりも特殊だが非常に重要な場合について論じる方に興味が移り，そのようにすることにした．とくに盛んにモンテカルロ積分が実行されているであろうブラウン運動のシミュレーションがどこまで正確にできるか，つまりブラウン運動にまつわる確率変数のモンテカルロ積分の精密性を追求することを主な目的と考えるようになった．

3　研究の方法

本研究は数値計算のためにパーソナルコンピュータ (PC)，Visual Studio 2017(-2019) の C(++) コンパイラーを用いた．DRWS のパッケージは [7] に掲載のものを用いた．同一のプログラムをパラメータを変化させて計算するため研究室の修士課程学生諸氏と共に計算を実行した．

モンテカルロ積分の対象とした確率変数の具体例とそれぞれの困難性については事項で述べる．

4　研究成果

4.1　学術論文 [1] 発表の成果

本研究の学術論文としての成果は [1] だけである．その内容について説明する．

(D)RWS の生成するサンプル平均の分布は期待値の近傍に集中する一方，積分対象の確率変数によっては，裾野が厚く i.i.d. の場合に想定される正規分布からほど遠くなる．言い換えると，サンプル平均が真の期待値からずっと離れてしまう確率が (それは十分小さいものの) 正規分布よりずっと大きくなる．

そこで [1] では k-対独立の m ビットの一様確率変数列を先行研究 [3] で知られていたものよりも小さいランダムな種より構成する方法を開発し，とくに $k = 3, 4$ の場合にそれをランダム源とするモンテカルロ積分を実装した．その結果，4-対独立の場合には，積分対象となる確率変数によらず，サンプル平均が正規分布と区別できなかった．

4.2　中間的な成果

本研究による他の結果は，国際的な学術雑誌に掲載される水準まで届かなかったのは残念である．しかし，そのいくつかは公表の価値があると信じ，本成果報告書に記載することにした．それらはすべてブラウン運動にまつわる確率変数のモンテカルロ積分の精密性を追求することを目的としている．

■ブラウン運動の境界への到達時刻の分布　(1) 1 次元の有界閉区間上のブラウン運動が端点に到達する時刻をレヴィーの折れ線近似を用いて推定する．このとき時間刻み幅を小さくとると精密に推定できるが膨大な計算時間が掛かり，大きくとると計算時間は短いが推定の誤差が大きくなる．正確にかつ素早く推定するために，本研究では端点から遠い領域では折れ線近似の時間刻み幅を大きくとり，端点に近づくにつれ折れ線近似の時間刻み幅を小さくとるアルゴリズムを開発した．具体的には時間刻み幅を次のステップまでに端点に達する確率が 99% 未満になるときに，時間刻み幅を半分にする，というアルゴリズムを採用した．結果はほぼ満足の行くものであった．

(2) 半直線 $[0, \infty)$ 上のブラウン運動が 0 に到達する時刻 τ は期待値が無限大になるので τ の関数のモンテカルロ積分はまったくうまく行かない．そこで負の定数のドリフトを持つブラウン運動 (前項 (1) の時間刻み幅を変化させたレヴィーの折れ線近似) でシミュレーションを行い，カメロン-マルティン密度の逆数を重み関数にしてモンテカルロ積分を行う実験をした．ドリフトを大きくすると，早く境界に達するので計算時間は短いが，到達までに時間が掛かる場合に重み関数が非常に大きくなり精度が悪くなる．実用上はごく小さいドリフトを付けるのが適切のようだが，最適の値を得ることについては研究途上である．

(3) 前項 (1)(2) の応用として 2 次元ラプラス方程式の境界地問題を角谷の定理を応用して解く実験を行った．長方形領域の場合は十分満足の行く結果を得たが，半平面の場合は (2) の方法が確立しきれていないこともあって推定精度を上げることができていない．

以上の結果は [4] に詳しく述べられている．

■2 階線形常微分方程式ランダムな摂動　2 階線形常微分方程式 $X''(t) = aX(t)$ の自明解 $X = 0$ は $a > 0$ のとき不安定である．これにランダムな摂動 $X(t)B'(t)$ ($B'(t)$ はブラウン運動の微分，白色雑音) を加えた $X''(t) = aX(t) + sX(t)B'(t)$ は結合パラメータ $s > 0$ の増加に伴ってその自明解が，不安定 $\to$ 安定 $\to$ 不安定，の経緯を辿る．そのことを解 $X(t)$ の分布をモンテカルロ積分することによって確認した．しかしながら，今

回の確認は定性的な結論であり，定量的，すなわち安定化を実現する s の範囲の数値的な決定は大まかな閾値が求まったに過ぎない．以下に，問題点を列挙する．

(1) 任意の s の値に対して $X(t)$ の期待値はもとの常微分方程式 $X''(t) = aX(t)$ の解と同一であり，不安定である．つまり安定化する場合でも小さい確率で解は指数的に増大する様子が見られる．そのような場合に期待値ではなく最頻値を追うことで安定化を論じた．概ねその方針で正しいと思われるが理論的な根拠はまだ見つけていない．

(2) ある時間範囲における解の安定性の議論はできるが，時間無限大でのそれは解析が困難であった．時間範囲を広げていくとき安定化する s の範囲も動き，無限時間での安定化する s の範囲を確定できなかった．

以上の結果は [6] に詳しく述べられている．

■1 次元ブラウン運動の局所時間の分布　1 次元ブラウン運動の時刻 1 での局所時間の分布の数値計算法について研究した．局所時間はブラウン運動の局所的な挙動と大域的な挙動の両方に強く依存するため，分布を高い精度で数値的に求めることは大変困難であることは当初より予想していた．次の 2 つの方法を試みた：(a) 局所時間をレヴィーの定義通りに求める方法．すなわちブラウン運動を時間刻みに応じて独立な正規乱数を加えていく方法で構成し，それに対して時間刻みの平方根の幅のダウンクロッシングの数を数える方法，(b) 単純ランダムウォークの零点の個数を数えてステップ数の平方根で除して計算する方法．比較の結果，(b) の方法が計算精度および計算速度の両方で優れていることが分かった．

以上の結果は [2] に詳しく述べられている．

■ブラウン運動に関する逆正弦法則　(1) 1 次元ブラウン運動の逆正弦法則の数値計算法について研究した．対象とした確率変数は次の 3 つである：0 を出発する 1 次元ブラウン運動の時刻 1 までの (c) 正の側の滞在時間の割合，(d) 最後の零点を与える時刻，(e) 最大値を与える時刻．(c) は比較的容易であったが，(d)(e) の数値計算は甚だ困難であった．その原因は両方の確率変数とも離散化した場合に 0 の値を取る確率が予想以上に大きかったことである．そこで，両方の離散化確率変数とも 0 になる場合を排除して計算することによって正しい近似を得ることができた．

(2) 原点を出発する 2 次元ブラウン運動の時刻 1 までの第一象限における滞在時間の割合の分布についてきわめて精度の高い数値計算を行った．この分布は現時点で厳密な解析的結果が得られていない未解決問題である．先行研究では分布関数が $x = 0$ 付近で漸近的に $cx^{1/3}$ であることが知られていた．我々の数値計算の結果は，分布関数が $0 < x < 1$ で正確に $x^{1/3}$ であることを示唆している．

以上の結果は [5] に詳しく述べられている．

参考文献

[1] T. Achiha, H. Sugita K. Tonohiro and Y. Yamamoto, Generation of *k*-wise independent random variables with small randomness. *Monte Carlo Methods Appl*. **25** (2019) no.3, 259–270.

[2] 朴良徳，「一次元 Brown 運動の局所時間の数値計算法について」，大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士論文，2022 年．

[3] M. Dietzfelbinger, Universal hashing and *k*-wise independent random variables via integer arithmetic without primes, *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science—STACS' 96*, Lecture Notes in Comput. Sci. **1046**, Springer, Berlin (1996), 569–580.

[4] 江田直生，「Brown 運動の到達時刻と Dirichlet 問題の数値計算」，大阪大学大学院理学研究科数学専攻修

士論文，2021 年.

[5] 根本英，「ブラウン運動に関連する逆正弦分布の数値計算」，大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士論文，2022 年.

[6] 西田朝敏，「ランダムな摂動による線形常微分方程式の安定化に関する考察」，大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士論文，2021 年.

[7] H. Sugita, *Monte Carlo Method, Random Number, and Pseudorandom Number*. MSJ Memoirs **25**, (2011), pp.xiv+133.

[8] 杉田洋，「確率と乱数」，数学書房，数学書房選書 4，2014 年 7 月.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 T.ACHIHA, H.SUGITA, K.TONOHIRO and Y.YAMAMOTO	４．巻 25-3
２．論文標題 Generation of k-wise independent random variables with small randomness	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Monte Carlo Methods Appl.	６．最初と最後の頁 259-270
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/mcma-2019-2046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroshi SUGITA Work in Mathematics
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sugita/mathematics.html
モンテカルロ法，乱数，および疑似乱数
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sugita/mcm.html
Monte Carlo Method, Random Number, and ...
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sugita/mcm_E.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関