様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月１０日現在

機関番号：１５２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３３３１

研究課題名（和文）タイヒミュラー・モジュラー群の有理変換群への表現を用いた力学系の研究

研究課題名（英文）A study on dynamical system of the Teichmuller modular group represented by a group of rational transformations

研究代表者
中西　敏浩（Nakanishi, Toshihiro）

島根大学・学術研究院理工学系・教授

研究者番号：００１７２３５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：タイヒミュラー空間の研究を行った。適切に選んだ閉測地線の長さを用いたトレース関数の組はコンパクト双曲曲面のタイヒミュラー空間の大域的座標系を与え，かつ写像類群を有理変換群に表現する。このことの応用として，2つ穴あきトーラス群のSL(2,R)の行列表現と写像類群の有理変換群表現を具体的に得た。
牛島顕氏との共同研究でフックス群のディリクレ基本領域の研究を行った。辺の数が極大数でないディリクレ基本領域の基点は「除外的」で呼ばれるが，第1種有限生成フックス群に対して「除外点」の集合が非可算無限集合であることを証明した。これは放物型元を含まないフックス群に対するJ. Feraの結果の一般化である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
我々の研究は，写像類のタイヒミュラー空間への作用を具体的な有理変換として表現するもので，写像類の反復合成による軌道やその不動点の近傍における挙動などを実際の数値や有理写像をともなって計算することができる。まだ大きくは進歩していないが，タイヒミュラー空間や多変数複素力学系の新しい分野を拓くものである。また3次元双曲多様体論，不連続群論や整数論などに多くの応用をもち，今後の発展が他分野に与える影響は大きいと予想する。

研究成果の概要（英文）：The Teichmuller space of a surface of finite topological type admits a global coordinate system where parameters are lengths of some closed geodesics on the surface. We use this coordinate system with a suitable choice of closed geodesics for the Teichmuller space of the twice punctured torus and obtained a Fuchsian (matrix) representation of a twice punctured torus group and also a rational representation of its mapping class group. When a Fuchsian group of a finite coarea is given, a point of the hyperbolic plane is called exceptional if the number of sides of the Dirichlet fundamental polygon centered at this point is not maximal. With a joint work with Akira Ushijima, we show that the set of exceptional points is uncountable and generalize a result by J. Fera for cocompact Fuchsian group.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間　クライン群　リーマン面　双曲幾何

１．研究開始当初の背景

m 個の境界成分をもつ種数 g のコンパクト向き付け可能曲面(2g+m≧3)のタイヒミュラー(Teichmüller)空間 T(g,m)を有限次元の実または複素パラメータ空間に埋め込むことを考える。さまざまなパラメータが知られているが，タイヒミュラー空間を曲面上の双曲計量の変形空間と見なした上で曲面上の閉測地線の長さをパラメータに採用し，T(g,m)を d=6g-5+2m, すなわちタイヒミュラー空間の次元より一つだけ多い次元の実パラメータ空間 $\mathbf{R}^d$ の超曲面として実現できる。我々はこの事実に注目し，タイヒミュラー空間に作用する写像類群(タイヒミュラー・モジュラー群ともいう)の作用を，閉測地線の長さパラメータを用いて表現する研究に取り組んできた。そして閉測地線を適切に選べば，それらの長さは写像類の作用を有理変換として表現することがわかった。この結果は写像類群の力学系を具体的にかつ定量的に調べることができることを意味する。たとえば写像の反復合成の力学系の研究では不動点の周りの写像の状況を調べることが大切であるが，我々の結果により，写像類の不動点を連立代数方程式の解として求めることや，不動点における写像の微分を計算してヤコビ行列の固有値を計算することができる。ひいては力学系理論において「写像類群の力学系」という分野を開拓することも期待できる。この研究を他分野，たとえば, 3 次元多様体論 (円周上の曲面束の双曲幾何化)，離散群論，数論（ディオファントス問題）に応用することができる。

今回目指した研究は一般論の構築ではなく，具体例の追求であった。一つ穴あきトーラスのタイヒミュラー空間およびその写像類群の研究成果は多量に存在する。それはタイヒミュラー空間 T(1,1)が上半平面と正則同型であること，またそれにより写像類群が PSL(2,Z)と同型になること，測地線の長さをパラメータに用いても写像類がマルコフ変換($x^2+y^2+z^2=xyz$ を不変にする多項式写像)で表されることに起因する。しかしながら，より複雑な曲面になると，例えば２つ穴あきトーラスのような曲面に対してもそれを題材とした研究論文数は激減する。空間が高次元化することも一因であるが，写像類の表現も多項式写像ではない有理写像となって反復合成の計算が複雑かつ膨大であることが大きな理由である。現状では計算量の大きさを克服するほどには写像類群の研究が進展していない。そこで我々は２つ穴あきトーラスと種数２の閉曲面に集中して研究することにした。上述のようにこのような位相的に単純な曲面の場合でも先行する研究はほとんど存在しない。

閉測地線の長さをパラメータに用いたタイヒミュラー空間の研究は 19 世紀末の Fricke-Klein の研究にまで遡ることができる。その後, Keen, Seppälä-Sorvali，奥村の研究を経て，Schumtz によるパラメータがタイヒミュラー空間の大域座標系となるための必要最小個数の決定問題の解決，Feng-Luo の結果（タイヒミュラー空間を定義する関係式が Ruler-Compass 関数(四則演算と平方根を取る操作を有限回繰り返して得られる関数)の零点集合に含まれることを示した）と続いた。しかし，その研究はタイヒミュラー空間論の多様化，高次元化の潮流の中で現在では隆盛であるとは言えない。しかしその重要さが減じているわけでは決してなく，以前から未解決のまま存在する様々な課題を解決し，タイヒミュラー空間論や離散群論に新たな知見やデータを提供することは大いに必要であると考えている。

２．研究の目的

我々の研究課題は Feng Luo らによるこれまでのタイヒミュラー空間の座標付けの研究を継承し，さらに写像類群（タイヒミュラー・モジュラー群）の研究へと拡大させたものである。研究代表者の中西は以前，いくつかのモジュライ空間の Weil-Petersson(WP)体積を計算した。非閉曲面のモジュライ空間の WP 体積については，M. Mirzakhani による決定的な仕事があるが，それは WP 形式をモジュライ空間上で積分するという正攻法による計算ではなかった。正攻法によって WP 体積を求めようとするならば，タイヒミュラー空間上の写像類群の作用の基本領域を知らなければならない。我々の従来の研究によって写像類群が有理変換群の表現をもつことがわかっている。この表現を用いて基本領域を決定することが研究の目的である。この研究を中心に据えて，写像類群が有理変換群の表現の応用である次の課題に取り組む。

(1) 写像類群の作用に関する基本領域，したがってモジュライ空間の決定
(2) タイヒミュラー空間の Weil-Petersson 幾何の研究
(3) 円周上の曲面束の構造をもつ 3 次元双曲多様体の具体例の構成
(4) 写像類を表現する有理変換の高次元反復力学系
(5) Markov 方程式の整数解をモデルとする不定方程式の整数解の問題
(6) McShane 恒等式の一般曲面への拡張

長い歴史をもつタイヒミュラー空間の研究にも関わらず，トーラスあるいは 1 点穴あきトーラス，4 点穴あき球面のタイヒミュラー空間を除けば，次に位相的に単純な曲面である種数 2 の閉曲面のタイヒミュラー空間でさえその姿を把握することができていない。しかし我々の研究によって写像類群を有理変換として実現することができたので多くのこと(写像類の反復合成や不動点の計算など)が具体的な計算や数値実験によって検証できるようになる。必要ならばコンピュータの援用することによって興味深い性質をもつ３次元双曲多様体やクライン群の具体例の構成やコン

ピュータ・グラフィックによる可視化を行えば，今まで知られていない現象や応用が見つかる可能性がある。とくに写像類を題材とした有理変換の高次元反復力学系は端緒についたばかりであるが，３次元多様体や数論など他の数学の分野を巻き込んで発展する可能性をもち，将来有望な研究課題だと考えられる。

３．研究の方法

タイヒミュラー空間に作用する写像類群の有理変換群としての表現をタイヒミュラー空間論およびクライン群論の諸問題に応用する。これまでの研究によって位相的有限(g,m)型曲面のタイヒミュラー空間T(g,m)に作用する写像類群を有理変換群として表現することに成功した。しかし，これはあくまでも「表現の可能性」を証明したのであって，個々のT(g,m)について具体的な表現を得たわけではなかった。そこで２つ穴あきトーラスと種数２の閉曲面の場合に写像類のリコリッシュ・ハンフリー生成系の有理変換表現を計算した。計算の根底にあるのは SL(2,**R**)におけるトレース恒等式である。さらに２つ穴あきトーラスと種数２の閉曲面の基本群の SL(2,**R**)行列表現を得た。

この研究においてさまざまな手法，数式処理プログラムやデータを蓄積することができたのでその応用を考えた。Thurston の定理により，不動点には円周上の曲面束の構造をもつ双曲多様体が対応することがわかっている。そこで有理変換に表現された Anosov 型のいくつかの写像類の SL(2,**C**)表現空間への作用の不動点を計算した。数式処理ソフト(Mathematica)を援用してこうした双曲的多様体を一意化するクライン群の例をいくつか見つけることができた。

基本的には研究代表者中西敏浩が単独で研究を行ったが，これまでも共著論文を出版している中村豪を連携研究者に加え研究連絡を不断に行った。中村氏には彼が得意とするリーマン面の自己同型群についての知識を提供してもらった。学会や研究集会に参加したときや島根大において開催したセミナー時に廣瀬進氏(東京理科大)，高村茂氏（京都大)，田所勇樹氏（木更津高専）,他の位相幾何やリーマン面や３次元双曲多様体論の専門家からも必要な知識を提供してもらった。

研究には膨大な計算が関わるのでこれまでと同様，数式処理ソフト Mathematica を援用した。

４．研究成果

従来の研究でコンパクト双曲曲面のタイヒミュラー空間の大域座標系についての研究を行い，目標としていた閉測地線の長さを用いたトレース関数によってタイヒミュラー空間の大域的座標を与え，それによる写像類群の表現が有理変換のつくる群になることを示すことができた。この座標を用いて2つ穴あきトーラス群のSL(2,**R**)の行列表現と写像類群の有理変換群としての表現を得た。また2つ穴あきトーラスをファイバーにもつ円周上の曲面束の構造をもつ体積有限の双曲多様体の例を構成した。続いて種数2の閉曲面の基本群のSL(2,**R**)の行列表現と写像類群の有理変換群としての表現を得た。残留的極限点をもつクライン群の例を見つけることができた。

また牛島顕氏との共同研究でフックス群のディリクレ基本領域の研究を行った。双曲平面の点を基点とするディリクレ基本領域の辺の数が極大であるとき，基点は「一般的」，そうでない場合は「除外的」であるという。第1種有限生成フックス群に対して「除外点」の集合が非可算無限集合であることを証明した。群がココンパクトのときはJ. Feraによってこの事実が証明されていたが，我々はその結果を一般化した。
。

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

1. G. Nakamura and T. Nakanishi , Generation of finite subgroups of the mapping class group ofgenus 2 surface by Dehn twists, Journal of Pure and Applied Algebra, 222 (2018) 3585-3594

2. T.Nakanishi, Akira Ushijima, Existence of exceptional points for Fuchsian groups of finite coarea, Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society, 24. 8. (2020), https://doi.org/10.1090/ecgd/353

3. Teichmüller space and the mapping class group of the twice punctured torus, J. Math. Soc. Japan, 73, 4, (2021), 1221-1252. DOI: 10.2969/jmsj/84998499

〔学会発表〕（計７件）

１．中西敏浩, いくつかのクライン群の例について，Workshop on Potential Theory and Complex Analysis, 2021 年４月
２．中西敏浩，種数２の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群の例について，函数論シンポジウム, 2021 年 10 月
３．中西敏浩，　いくつかのクライン群の例，Workshop on potential theory and complex analysis，京都産業大学，2021 年４月 24 日
４．中西敏浩，　種数２の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群について，第 64 回函数論シンポジウム，(オンライン開催)　2021 年 10 月 31 日

５．中西敏浩， 円周上の曲面束である３次元閉双曲多様体の具体例について，東工大複素解析セミナー，東京工業大学，2022 年 6 月 3 日
６．中西敏浩， ２ つ穴あきトーラスの Teichmuller 空間と Klein 群，愛媛大学解析セミナー，愛媛大学，2022 年 12 月 9 日
７．中西敏浩， おもに種数２の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群について，日本数学会年会特別講演，中央大学， 2022 年 3 月 15 日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
中西 敏浩，(NAKANISHI TOSHIHIRO)島根大学・大学院総合理工学研究科・教授
研究者番号：00172354

(2) 研究分担者 なし

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 NAKANISHI Toshihiro	４．巻 73
２．論文標題 Teichmuller space and the mapping class group of the twice punctured torus	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 1221-1252
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/84998499	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Toshihiro Nakanishi and Akira Ushijima	４．巻 24
２．論文標題 Existence of exceptional points for Fuchsian groups of finite coarea	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics	６．最初と最後の頁 164-176
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ecgd/353	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Gou Nakamura and Toshihiro Nakanishi	４．巻 222
２．論文標題 Generation of finite subgroups of the mapping class group ofgenus 2 surface by Dehn twists	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	６．最初と最後の頁 3585-3594
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2018.01.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 中西敏浩
２．発表標題 いくつかのクライン群の例について
３．学会等名 Workshop on Potential Theory and Complex Analysis（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
種数２の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群の例について

３．学会等名
函数論シンポジウム

４．発表年
2021年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
2点穴あきトーラス群の空間の座標系のいくつかの応用

３．学会等名
日本数学会秋季総合分科会

４．発表年
2019年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
2点穴あきトーラス群のタイヒミュラー空間と写像類群

３．学会等名
研究集会「タイヒミュラー空間と双曲幾何学」

４．発表年
2020年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
Jacobian varieties for Riemann surfaces and tropical curves

３．学会等名
リーマン面のモジュライ空間の諸相

４．発表年
2020年

１．発表者名
牛島顕・中西敏浩

２．発表標題
有限余面積フックス群に対するexceptionalな基点の存在について

３．学会等名
日本数学会年会

４．発表年
2020年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
種数2の閉曲面のタイヒミュラー空間の諸相

３．学会等名
Geometry of Riemann surfaces and related topics（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
円周上の曲面束である３次元閉双曲多様体の具体例について

３．学会等名
東工大複素解析セミナー

４．発表年
2022年

１．発表者名
中西敏浩

２．発表標題
2つ穴あきトーラスのTeichmuller空間とKlein群

３．学会等名
愛媛大学解析セミナー

４．発表年
2022年

１．発表者名 中西敏浩
２．発表標題 おもに種数２の閉曲面のタイヒミュラー空間とクライン群について
３．学会等名 日本数学会年会特別講演（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関