様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 １３ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３３３３

研究課題名（和文）非線形問題解明に向けたポテンシャル論研究

研究課題名（英文）Research on potential theory for solving nonlinear problems

研究代表者
平田　賢太郎（Hirata, Kentaro）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・准教授

研究者番号：３０３９９７９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：滑らかな境界またはLipschitz境界をもつ有界領域上で非線形不等式を満たす正値優調和関数に対する境界Harnack原理を証明し，優線形楕円型方程式の0-Dirichlet境界値問題の正値解に対する両側評価や境界に孤立特異点をもつ正値解の漸近評価・特異点の除去可能性へ応用した．さらに，単位球において優線形楕円型方程式の正値解の境界増大度と境界特異点集合のHausdorff次元の関係，および解と勾配の冪乗を含む準線形楕円型方程式の正値解の増大度と特異点集合の除去可能性の関係を明らかにした．また，一般領域において測度を係数にもつ劣線形楕円型方程式が連続な正値解をもつための必要十分条件を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Bidaut-Veron氏とVivier氏は，滑らかな有界領域においてLane-Emden方程式の正値解に対する両側評価を与えたが，0-Dirichlet境界値をもつ正値解に対しては下からの評価が無意味なものであり，証明方法も積分核の具体的表示を用いた弱L1理論に基づくものであったためLipschitz領域の場合に適用することができなかった．本研究では，ポテンシャル論の結果・方法を駆使して境界Harnack原理を確立し，先行研究の不備を補完するだけでなく，新たな証明方法を構築することができた．また，解表示を有さないので，増大度と特異点集合のサイズの関係を明らかにすることも意義のあることである．

研究成果の概要（英文）：In a bounded domain with smooth or Lipschitz boundary, we established the boundary Harnack principle for positive superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality, and applied it to obtain two-sided estimates for positive solutions of a superlinear elliptic equation with 0-Dirichlet boundary values and asymptotic estimates for positive solutions with isolated singularities at a boundary point. Furthermore, we clarified the relationship between boundary radial growth rates and the Hausdorff dimension of singular sets on the boundary for positive solutions of a superlinear elliptic equation in the unit ball, and the relationship between growth rates near interior singular sets and removability of such sets. Also, we give a necessary and sufficient condition for a sublinear elliptic equation with measure coefficients to have a positive continuous solution in a general domain.

研究分野：数学

キーワード：ポテンシャル論　非線形楕円型方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

正値調和関数や一様楕円型２階偏微分方程式の正値解に対しては，Harnack 不等式を或る意味で境界まで拡張した Carleson 評価や境界 Harnack 原理の成立が知られており，非接極限の存在や Martin 境界の研究と並行して研究されてきた．これらの評価は Green 関数の評価や正値解の境界付近の減少度または増大度を評価する際に用いられるなど，その重要性は広く認識されており，非局所的作用素である分数幕 Laplace 方程式や非線形作用素である p-Laplace 方程式などに対しても研究されている．一方で，星の内部構造を記述する Lane-Emden 方程式 $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ など，非線形項を付加した方程式に対する境界 Harnack 原理は知られていない．また，滑らかな有界領域 D において，$p > 1$ が Brezis-Turner 指数より小さいときに，任意の正値解 u は非負値調和関数 h と境界までの距離関数 $d(x, \partial D)$ を用いて

$$h(x) \le u(x) \le C\{h(x) + d(x, \partial D)\} \quad (x \in D)$$

と評価できることが Bidaut-Veron-Vivier(2000)により示されたが，Dirichlet 境界条件 $u = 0$ を満たす正値解に対しては $h \equiv 0$ となり，下からの評価は意味をもたない．彼らの証明方法は，Green 関数や Poisson 核が境界までの距離関数を用いて具体的に評価できる事実と弱 L^p 空間の議論に基づくもので，角をもつ領域の場合には Poisson 核の弱 $L^p (p > 1)$ 可積分性が保証されないため適用できない．さらに，より一般の形をした非線形項やポテンシャル関数が付加された非線形項の場合や非線形指数が $p < 1$ の場合には適用できないものであった．

特異点付近の挙動や特異点の除去可能性も興味深い研究であり，様々な方程式に対して古くから研究されている．内部孤立特異点まわりの正値解の挙動や除去可能性に関しては，$1 < p < N/(N-2)$ の Lane-Emden 方程式に対する Lions の結果やその非線形不等式への一般化である Taliaferro の結果が知られている．また，高次元の特異点集合の除去可能性については，2014～2017 年度の科学研究費助成事業において，より一般の非線形湧出項をもつ方程式に対して結果を得ているが，勾配を含む非線形項に対しては未解決である．境界に特異点をもつ正値解の存在・挙動および特異点の除去可能性は，領域の形状に大きく影響するため，より困難な問題になる．Bidaut-Veron-Vivier(2000)は，滑らかな有界領域 D において，上記の評価を応用して，境界上に確率測度 μ を与えたときの Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{in } D, \\ u = \lambda\mu & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の解の存在・非存在に関して正数 λ の臨界値の存在を示した．この問題は積分方程式の意味で解釈され，それに付随する積分作用素を考慮すれば，次の Cranston-McConnell 不等式の変形版と関係があるだろうと予想される．

$$\min_x \frac{1}{h(x)} \int G(x, y) h(y)^p dy < +\infty$$

$p = 1$ のときは領域に対する弱い条件下で成り立つことが知られているが，$p > 1$ の場合は領域の形状に大きく影響する．従って，Cranston-McConnell 不等式の変形版が成り立つための指数 p と領域の幾何的性質の関係を考察することは興味深いことである．

２．研究の目的

上記の研究背景を踏まえ，より一般の非線形湧出項をもつ半線形楕円型方程式に対して，正値解の境界挙動を明らかにしていくために，次の問題に取り組む．

(1)　滑らかな有界領域 D において，Dirichlet 境界条件 $u = 0$ を満たす正値解 u に対して，下からの評価 $u(x) \ge Cd(x, \partial D)$ は成り立つかについて考察する．

(2)　Lipschitz 領域やフラクタル的境界をもつ複雑領域において，半線形楕円型方程式の正値解に対しても Carleson 評価や境界 Harnack 原理が成り立つか？さらに，Bidaut-Veron-Vivier の評価の類似物を導くことができるかについて考察する．

(3)　Cranston-McConnell 不等式の変形版が成り立つための領域に対する幾何的条件を探求する．また，測度を境界値とする Dirichlet 問題の研究に応用できるかについて考察する．

３．研究の方法

正値調和関数に対する Carleson 評価や境界 Harnack 原理は，比較原理，掃散，積分などの線形理論を用いて証明されたが，半線形楕円型方程式の正値解に対して同様の評価を得るためには非線形項を考慮した議論が必要になる．これまでの研究や関連論文・専門書を精査し，先行研究で用いられた証明方法の再確認や具体例による検証を通して本質を捉え，独自性ある証明を

与える．また，関連する国内外の研究集会やセミナー等に参加して最新研究の情報収集や意見交換を行い，新たな手法を取り入れながら研究遂行できるように努める．

４．研究成果

(1) 優線形楕円型方程式の斉次 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p \text{ in } D \\ u = 0 \text{ on } \partial D \end{cases}$$

の有界な正値解に対する両側評価： D が有界 Lipschitz 領域，$p > 1$，$a(x)$が非負値有界関数である場合に，有界な正値解 u が Dirichlet-Laplace 作用素に関する Green 関数の truncation g を用いて上下両側から評価できることを示した．つまり，定数 C が存在して，D 上で $C^{-1}g \le u \le Cg$ が成り立つ．一般に定数 C は u の一様ノルムにも依存するが，非線形指数 p が次元と領域の形状で定まる或る定数 p_α より小さい場合は McKenna-Reichel(2007)の結果により定数 C は u に無関係にとることができる．系として正値解の勾配に対する各点評価を与えた．証明方法は，Green 関数の大域的評価とポテンシャルの反復議論による．ここで開発した証明方法が次の(2)を解決する手掛かりとなった．

(2) 領域 D 上で優線形楕円型不等式 $0 \le -\Delta u \le Cu^p$ を満たす正値優調和関数に対する境界 Harnack 原理と，境界に孤立特異点をもつ正値優調和関数の漸近評価： D が外部一様球条件を満たす有界 Lipschitz 領域，$1 < p < p_\alpha$ の場合に，境界の一部 E で 0 となる２つの正値優調和関数 u, v の比に対する Harnack 不等式 $u(y)/v(y) \leqq C(u(x)/v(x))$（ただし，x, y は E 付近の D の点）を示した．先行研究（1）のおかげで，Green 関数の truncation g との比 u/g に対して上記不等式を示せばよいことに気づいた点が解決へとつながった．証明方法は，2010 年に得た境界増大評価とポテンシャル評価を交えた反復議論に基づく．さらに，境界 Harnack 原理を用いて，境界に孤立特異点をもつ上記不等式を満たす正値優調和関数は Martin 核で上下両側評価が可能になり，漸近評価を得ることができた．その応用として，特異点の除去可能性に対する必要十分条件を与えることができた．

(3) N 次元単位球 B 上で優線形楕円型不等式 $0 \le -\Delta u(x) \le C(1-|x|)^{-\alpha}u(x)^p$ を満たす正値優調和関数の境界増大度と特異点集合の関係： $1 < p < (N+1)/(N-1)$ かつ $0 \le \alpha < N + 1 - p(N-1)$の場合，放射状極限が $+\infty$ となる境界点の集合の N-1 次元 Hausdorff 測度は 0 であり，関数 $(1-|x|)^{N-1}u(x)$ の放射状極限が $+\infty$ となる境界点は存在しないことが 2010 年の研究成果からわかる．そこで，その間の増大度と特異点集合のサイズの関係を明らかにするため，$0 < \beta < N-1$ に対して関数 $(1-|x|)^{\beta}u(x)$ の放射状極限が正となる境界点の集合の Hausdorff 次元が $N-1-\beta$ であることを示した．さらに，境界に $N-1-\beta$ 次元 Hausdorff 測度が 0 である集合を与えると，そこに特異点をもつ上記不等式を満たす正値優調和関数が存在することも明らかにした．証明方法は，増大度に関して特異点集合を分解し，それにより Green ポテンシャル部分の評価が可能になり，被覆定理と球面への射影を用いて Hausdorff 測度の評価を導いた．

(4) 一般領域 D 上の劣線形楕円型方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^p + \nu \text{ in } D \\ u = f \quad \text{on } \partial D \end{cases}$$

の正値解の存在と一意性： A．Seesanea 氏との共同研究により，$0 < p < 1$，μ, ν が D 上の測度，f が境界上の連続関数である場合に，連続な正値解が存在するための μ, ν に対する必要十分条件を与え，Schauder の不動点定理を用いる方法と逐次近似法に基づく２通りの方法で証明を与えた．逐次近似法で構成した解が最小解となることに注意し，解を用いたテスト関数を構成するために領域の増大列を考え，一意性の証明を与えた．

(5) N 次元 Euclid 空間において，解の冪乗と勾配の冪乗を含む準線形楕円型方程式

$$-\Delta_p u = a(x)|u|^q + b(x)|\nabla u|^s + c(x)|u|^\sigma|\nabla u|^\tau$$

の正値解の増大度と特異点集合の除去可能性の関係： $1 < p < N$，$0 \le m < N-p$，$0 < q < (N-m)(p-1)/(N-m-p)$，$0 < s < (N-m)(p-1)/(N-m-1)$，$\sigma(N-m-p) + \tau(N-m-1) < (N-m)(p-1)$，$\Delta_p$ が p-Laplace 作用素，∇u が u の勾配である場合に，m 次元一様 Minkowski 条件を満たすコンパクト集合は(N-m-p)/(p-1)増大条件を満たす正値解に対して除去可能であることを示した．Whitney 立方体分割を用いて勾配に対する積分評価を与えることで適当な Wolff ポテンシャル評価を得ることが可能になり，反復議論によ

り特異点集合付近での解の有界性を示すことで証明を与えることができた．

(6)　<u>滑らかな有界領域 D において，境界に特異点をもつ非負値ポテンシャル関数 V_1, V_2 を係数にもつ優線形楕円型方程式 $-\Delta u + V_1 u = V_2 u^p$ の正値解の性質</u>： 正値解に対して境界増大評価，Harnack 不等式，境界減少評価，境界に孤立特異点をもつ正値解の漸近評価と特異点の除去可能性を示した．定常 Schrodinger 方程式 $-\Delta u + V_1 u = 0$ に対して局所境界 Harnack 原理が知られていないため $V_1 = 0$ のときの方法を直接適用できないが，ラプラス作用素に関する Green 関数と Schrodinger 作用素に関する Green 関数が比較可能であることに基づく解の変換を通して，上記(2)の研究で考察したような優線形楕円型不等式を満たす正値優調和関数の族に対する研究に帰着して証明を与えた．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Kentaro Hirata	53
2．論文標題	5．発行年
Removable singularities for quasilinear elliptic equations with source terms involving the solution and its gradient	2022年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)	787--800
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s00574-022-00283-y	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	―

1．著者名	4．巻
K. Hirata and A. Seesanea	171
2．論文標題	5．発行年
The Dirichlet problem for sublinear elliptic equations with source	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Bull. Sci. Math.	No. 103030
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1016/j.bulsci.2021.103030	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

1．著者名	4．巻
K. Hirata	31
2．論文標題	5．発行年
Boundary growth rates and exceptional sets for superharmonic functions on the real hyperbolic ball	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
J. Geom. Anal.	10586--10602
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s12220-021-00657-6	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	―

1．著者名	4．巻
H. Aikawa, T. Hara, K. Hirata	296
2．論文標題	5．発行年
Global integrability of supertemperatures	2020年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Math. Z.	1049--1063
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s00209-020-02467-y	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	―

1．著者名 K. Hirata	4．巻 72
2．論文標題 Boundary estimates for superharmonic functions and solutions of semilinear elliptic equations with source	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Collect. Math.	6．最初と最後の頁 43--61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13348-020-00279-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Hirata	4．巻 116
2．論文標題 Boundary growth rates and the size of singular sets for superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Arch. Math. (Basel)	6．最初と最後の頁 335--344
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00013-020-01551-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kentaro Hirata	4．巻 138
2．論文標題 A priori growth estimates for nonnegative supertemperatures and solutions of semilinear heat equations in a Lipschitz domain	5．発行年 2019年
3．雑誌名 J. Anal. Math.	6．最初と最後の頁 441-463
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11854-019-0046-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kentaro Hirata	4．巻 98
2．論文標題 Two-sided estimates for positive solutions of superlinear elliptic boundary value problems	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Bull. Aust. Math. Soc.	6．最初と最後の頁 465--473
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S000497271800093X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　5件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 Kentaro Hirata
2．発表標題 Equivalent properties to a priori estimates for positive solutions of quasilinear elliptic equations with reaction terms
3．学会等名 The POSTECH Conference 2022 on Complex Analytic Geometry（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 K. Hirata
2．発表標題 Positive solutions of semilinear elliptic equations with respect to the Schrodinger equation
3．学会等名 Asia-Pacific Analysis and PDF seminar（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kentaro Hirata
2．発表標題 Boundary estimates for positive solutions of semilinear elliptic equations with source
3．学会等名 Potential Theory and its Related Fields 2019（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Kentaro Hirata
2．発表標題 Removable isolated boundary singularities of positive solutions of semilinear elliptic equations in a Lipschitz domain
3．学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

１．発表者名
平田賢太郎

２．発表標題
Boundary Harnack principle for superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality in a Lipschitz domain

３．学会等名
第61回函数論シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
平田賢太郎

２．発表標題
孤立境界特異点をもつ半線形楕円型方程式の正値解の存在と挙動

３．学会等名
大阪市立大学複素解析セミナー（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
平田賢太郎

２．発表標題
半線形楕円型問題の正値解に対する評価

３．学会等名
日本数学会2018年度秋季総合分科会

４．発表年
2018年

１．発表者名
平田賢太郎

２．発表標題
半線形楕円型方程式の正値解に対する境界孤立特異点の除去可能性と拡張解に対する評価

３．学会等名
2018年度ポテンシャル論研究集会

４．発表年
2018年

1．発表者名 平田賢太郎
2．発表標題 半線形楕円型方程式に対するCarleson評価と境界Harnack原理
3．学会等名 2018年度ポテンシャル論研究集会
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関