様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　４月１３日現在

機関番号：１７１０２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：１８Ｋ０３３３６

研究課題名（和文）サブラプラシアンに対する確率微分幾何学の構築と展開

研究課題名（英文）Development of stochastic differential geometry associated with sub-Laplacians

研究代表者

谷口　説男（Taniguchi, Setsuo）

九州大学・基幹教育院・教授

研究者番号：７０１５５２０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：サブリーマン多様体上のサブラプラシアンから定まる拡散過程の構成，および短時間漸近挙動に現れる特性量の具体的な計算を行った．とくに，equi-regularではない，一般のパラメータaを持つグルーシン作用素（n次元ラプラシアンとn次元ユークリッドノルムの2a乗を掛けたm次元ラプラシアンの和）に対応する熱核（拡散過程の遷移確率）について対角線，非対角線上での短時間漸近挙動を詳しく調べた．とくに得られた諸量のパラメータaへの依存を明らかにした．そのために，直交群の作用する束上の拡散過程の構成，多様体上のマリアバン解析の再構築，ユークリッド空間上の偏マリアバン解析の整備などの理論的新展開を実現した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
多様体上の拡散過程の研究は，非退化微分作用素やヘルマンダー型と呼ばれるベクトル場の2乗和となる作用素で生成されるものが中心であり，サブリーマン多様体上のサブラプラシアンのように退化しさらにヘルマンダー型ではない生成作用素に対する確率解析的研究は非常に新しいものである．さらに，パラメータが自然数のグルーシン作用素については解析的研究が進んでいたが，パラメータが一般の正実数の場合の研究はなされていなかった．一般の場合の漸近挙動解析は，確率解析的手法による新たな成果である．さらにWatanabeの超関数理論に基づく偏マリアバン解析の体系化もまた確率解析にとって重要な理論的貢献である．

研究成果の概要（英文）：Diffusion processes associated with sub-Laplacians of sub-Riemannian manifolds are constructed and several quantities appearing in their short time asymptotic behavior are computed concretely. In particular, the short time asymptotic behavior of heat kernel associated with the Grushin operator with general parameter a of real number, which is no longer equi-regular and give as the sum of the n-dimensional Laplacian and the m-dimensional Laplacian multiplied by the n-dimensional Euclidean norm to 2a-th power) is investigated in detail in the cases of on-diagonal and off-diagonal. In both cases, the dependence on the parameter a of quantities resulting in the asymptotic behavior is clarified. On the way, new theoretical results are obtained; among them are (i) the construction of diffusion processes on vector bundles acted by orthogonal groups, (ii)the reconstruction of the Malliavin calculus on manifolds, and (iii) the reformulation of the partial Malliavin calculus on Euclidean spaces.

研究分野：確率解析

キーワード：マリアバン解析　サブラプラシアン　グルーシン作用素　熱核

１．研究開始当初の背景
拡散過程の研究には，Kolmogorov に始まる偏微分方程式論を用いる解析的手法と Itô に始まる確率微分方程式を用いる確率解析的手法の二つがある．後者は多様体上の拡散過程と多様体の幾何的性質の関連を研究する確率微分幾何学という研究分野に発展した．とくに熱核の確率解析的手法による研究，拡散過程の長時間挙動($t \to \infty$)の研究においては幾何学的特性量と結びついた様々な成果が得られている. しかし, K.D.Elworthy, P.Malliavin, J.M.Bismut, B.Driver, S.Watanabe 達による確率微分幾何学の研究は，非退化作用素であるリーマン多様体上のラプラシアンもしくは大域的なヘルマンダー型作用素に対応する拡散過程に基づいている．退化しており，大域的表現を持たない微分作用素であるサブラプラシアンに付随する拡散過程に対する確率論的視点からの研究は，申請当時 F.Baudoin, A.Thalmaier などにより精力的に進められていたが，確率微分方程式を基盤とする確率解析的手法による体系的な研究手法はまだ確立されていなかった．サブラプラシアンに付随する熱核の解析的研究が R.Beals，B.Gaveau，P.C.Greiner, W.Bauer, K.Furutani など多数の研究者により進められ，サブリーマン幾何学が発展していることに比べ，サブラプラシアンに対する確率微分幾何学は整備がはるかに遅れていたといえる. 研究代表者が, 複素主バンドルや実主バンドル上の確率微分方程式を用い, CR 多様体やサブリーマン多様体上のサブラプラシアンが生成する拡散過程の構成に成功したことにより, これまでよりも広いクラスのサブラプラシアンに対する, マリアバン解析を援用した熱核の確率解析的研究とそれに基づく確率微分幾何学の構築の端緒が拓かれた.

２．研究の目的
核心をなす問い『確率解析的手法により，サブラプラシアンに対応する拡散過程と幾何学的特性量との関連を明らかにできるか？』を解明することを目的とした. とくに確率微分方程式から実現される x を出発点とする拡散過程 $\{X(t,x);t\geqq 0\}$と点 y に集中したデルタ関数δ_y との合成 $\delta_y(X(t,x))$を用いて熱核をサブラプラシアンに付随する熱核を $p(t,x,y)=E[\delta_y(X(t,x))]$と一般化された期待値で表現できることを援用し，熱核 $p(t,x,y)$の対角線 $x=y$ および非対角線 $x\neq y$ 上における短時間漸近展開（$t\to 0$ の漸近展開）の漸近オーダー，展開係数などからサブラプラシアンの幾何学的特性量を抽出することを中心として，確率微分幾何学の構築と展開を目的とした. またこれに関連して, 熱核の存在を保証するマリアバン解析の多様体への応用を踏まえた再構築, 理論体系の整備, および漸近展開に現れる諸量の具体的な計算手法の確立も研究の目的である.

３．研究の方法
研究代表者は本研究に先立つ研究において, equi-regular（サブリーマン構造を決めるベクトル場のリー括弧積から作られるベクトル場全体が接空間を張るための括弧積の回数が基点に依存しない）なサブリーマン多様体に付随するサブラプラシアンに対する短時間漸近展開においては，漸近展開の主要項のオーダーが出発点 x に依らず一定となるという，equi-regular というサブリーマン構造が漸近展開に反映する事実を証明していた(九州大学稲濱譲教授との共同研究)．さらにサブリーマン多様体の水平空間がステップ 2 のリー環構造を持つ場合には 漸近展開の主要項の係数がこのサブリーマン構造に関連する積分量となることも見出していた．この equi-regular という構造を越えたサブリーマン構造の短時間漸近展開への反映を見るために，関連する確率解析的事実を明らかにするとともに, $n+m$ 次元ユークリッド空間上のサブラプラシアンであるグルーシン作用素について詳細な研究を行った. $n+m$ 次元ユークリッド空間の座標の n 次元成分を x，m 次元成分を y とすると，グルーシン作用素$\Delta(\alpha)$は x 成分に関するラプラシアンΔ_x と$|x|$の 2α 乗を掛けた y 成分に関するラプラシアンΔ_y の和となっている（αは非負実数)．したがって，グルーシン作用素$\Delta(\alpha)$は $x\neq 0$ では非退化な微分作用素となっているが $x=0$ で退化している. また整数でないαの場合は無限回微分可能な係数でなく，ヘルマンダー型微分作用素でもなくなる．$\Delta(\alpha)$に対応している拡散過程は，x 成分は標準ブラウン運動 $b(t)$であり，y 成分は $b(t)$とは独立なブラウン運動 $w(t)$による$|b(t)|$のα乗の確率積分となっている．この構造に着目し，(i)$b(t)$に関するマリアバン微分を利用した偏マリアバン解析を利用して熱核の存在証明とその一般化された期待値での表示を行うこと，さらに(ii)条件付き期待値を利用した熱核の表示を行うことにより, 漸近展開の具体的な計算を実行し，αが自然数の場合には解析的に得られているグルーシン作用素$\Delta(\alpha)$に付随する幾何学的な特性量を一般の正実数αの場合に確率解析的な手法で取り出す.

４．研究成果
(1)マリアバン解析の整備，深化を行った.
①$n+m$ 次元 Wiener 空間上の Watanabe の超汎関数理論をもとに，n 次元方向の偏 H-微分に拡張・整備しなおした偏マリアバン解析を展開した．偏 H-微分に相当する手法（考え方）は 1980 年代にフィルタリング問題へのマリアバン解析の応用の中で用いられているが，Watanabe の超汎関

数理論が整備されたのはそれより後であった．このため，Watanabe 超汎関数理論の枠組での偏H-微分の体系的な整備は行われていなかった．本研究における偏マリアバン解析の展開は確率解析の理論体系の整備として重要である．
②多様体に値をとるウィナー汎関数に対するマリアバン解析について新たな概念の導入と整備を行い，新局面を拓いた．
　まず，多様体に値をとるウィナー汎関数の H-微分とそれから定まるマリアバン共分散を(2,0)型テンソル値確率変数として定義し，それらの局所座標系を用いた局所的な表現を与えた．これらの表現に依り，ユークリッド空間上の定義の自然な一般化となっていることを確認した．
　また，他の Wiener 汎関数による制約条件下での非退化性という，より多様体に適合した概念を導入し，この非退化性のもとで多様体値 Wiener 汎関数に対する部分積分の公式を導出した．これにより，Elles-Elworthy-Malliavin の手法によりサブリーマン多様体の構造を決定するベクトル束上の確率微分方程式の解の射影として得られる，サブラプラシアンに付随する拡散過程の推移確率密度関数(熱核)の存在と滑らかさについてより統一的に証明する手法を確立した．
　さらに，非退化性は実は Wiener 汎関数がマリアバン解析の意味で沈め込みとなっているという条件と可積分性に関する条件の二つを纏めたものに他ならないことを明らかにし，マリアバン解析における非退化性についてより深い解釈を得た．
③Kusuoka-Stroock により証明された確率積分のマリアバン微分可能性の証明をより特別な被積分関数に制限することで簡便かつ明瞭に扱えるものにし，確率微分方程式の解の高階の微分可能性とその具体的な表示について厳密な証明を確立した．具体的な表示により，高階の微分可能性を示すための帰納法が非常に扱いやすいものとなり，また，近似列に対し要求する条件も明快となった．さらに，この手法を拡張して，確率微分方程式が定める確率流のマリアバン微分可能性についても明らかにした．
④ディラック測度の集中点への依存の超関数としての滑らかさが Wiener 汎関数とディラック測度の合成に伝搬することの証明において Bochner 積分が用いられていたことを再考し，Wiener 汎関数に関する部分積分の公式を超 Wiener 汎関数にまで広げることでより簡明で初等的な証明を与えることに成功した．この考え方を用いることで，熱核の時間，初期点，終端点に関する滑らかさを確率解析的な表示のみで証明することができた．
⑤グルーシン作用素Δ(α)についての研究の中で，Slobodeckij ノルムの二乗が Wiener 測度に対し指数可積分であることを明らかにした．このノルムはマリアバン解析の応用における経路空間の局所化の議論においてしばしば現れるものであり、その指数可積分性は重要な基本的性質である．

(2)サブリーマン多様体上のサブラプラシアンに関する確率解析的な成果を得た．
①サブラプラシアンに付随する拡散過程を構成するために，サブリーマン多様体の水平方向から定まる直交枠束を利用して，リーマン多様体に関する Elles-Elworthy-Malliavin の方法を拡張する手法において，得られた拡散過程の直交群の作用に関する回転不変性を証明した．
②研究代表者が以前に開発した，2 次ウィナー汎関数の特性関数およびその条件付き期待値を付随する常微分方程式（Jacobi 方程式）の解を用いて具体的に表示する手法を適用し，ハイゼンベルグ群の一般化であるカルノー群（ユークリッド空間と歪対称行列群の直積空間）上のサブラプラシアンに付随する熱核に対し，双曲線関数の行列への拡張による具体的な表示を与えた．

(3)グルーシン作用素Δ(α)に付随する拡散過程について詳細な研究を行った．
①一般の指数αを持つグルーシン作用素Δ(α)に対する熱核の存在を，n+m 次元 Wiener 空間上の偏マリアバン解析を展開することで証明した．さらに，Wiener 汎関数と超関数（グルーシン作用素の場合はディラック測度）との合成について，偏マリアバン解析を用いた部分積分の公式を利用して，ヘビサイド関数レベルでの熱核表示を確立した．これにより熱核のヘルダー連続性を証明した．指数αが整数であれば，旧来のマリアバン解析を援用することで熱核の無限回微分可能性が証明できるが，一般のαに対してはそのような事実を導くことは出来ていなかった．熱核の連続性が示せたことは新たな成果である．
②まず，一般のパラメータαをもつグルーシン作用素Δ(α)に付随する熱核，すなわち対応する拡散過程の遷移確率密度関数 $p(t,(x,y),(\xi,\eta))$をピン留めブラウン運動を利用して期待値表現する新しい表示式を得た（ここでは，n+m 次元ユークリッド空間の n 次元成分を x，ξ，m 次元成分と y，ηとしている）．
　つぎに，この表示式を用いて，遷移確率密度関数の短時間漸近挙動（$t\to 0$ での挙動）を明らかにした．とくに、対角線漸近挙動($(x,y)=(\xi,\eta)$の場合の漸近挙動)においては、グルーシン作用素の退化超平面($\{x=0\}$)の影響が $t\to 0$ での発散オーダーに現れることを示した．すなわち，$x=0$ かどうかにより，発散オーダーがαに応じて変化することを証明した．
　さらに，非対角線漸近挙動（$(x,y)\neq(\xi,\eta)$の場合の漸近挙動)において，大偏差理論におけるバラダンの補題を巧妙に援用することで，$t\to 0$ の $t\log(p(t,(x,y),(\xi,\eta))$の極限値を，指数減衰オーダーを変分で与えられる関数 m を用いて$(-1/2)\{|\xi-x|+m(x,\xi,|\eta-y|)\}$と表現することができた．さらに，この極限値の$|y-w|\to\infty$における発散のオーダーに $2/(1+\alpha)$という形でパラメータαが現われることを見出した．αが自然数の場合，Δ(α)は準楕円型のサブエリップク

ティック作用素の典型例となっており，偏微分方程式論的な手法で、対応するコントロール距離が短時間漸近挙動の指数にあらわれること、およびその$|\xi-x|$，$|\eta-y|\to\infty$における漸近挙動が詳しく調べられている．上で述べた$|\xi-x|+m(x,\xi,|\eta-y|)$は$\Delta(\alpha)$に付随するコントロール距離と一致していおり，さらに発散オーダーは解析的な手法で求められていたものと一致している．αが整数でない場合は、準楕円型サブエリプティック偏微分作用素のカテゴリーを外れ、これまで短時間漸近挙動に関する研究結果は得られていなかった．本研究の確率解析的手法により、一般のαまで短時間漸近挙動を解明できた．さらに、本研究によって得られて減衰オーダーはこれらの結果を再現するだけでなく，$x=\xi=0$ の場合には知られていなかった厳密なコントロール距離の表示を与えることができている．これはコントロール距離に関する新たな結果となっている．また、$x=\xi=0$ の場合は大偏差原理の応用に技術的な仕掛けが必要となり、その意味でも本研究の手法は興味深いものである．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Setsuo Taniguchi	4．巻 76
2．論文標題 On the tranisition density function of the diffusion process generated by the Grushin operator	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Kyushu J. Math.	6．最初と最後の頁 187-207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.76.187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 INAHAMA Yuzuru、TANIGUCHI Setsuo	4．巻 72
2．論文標題 Heat trace asymptotics on equiregular sub-Riemannian manifolds	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6．最初と最後の頁 1049，1096
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/82348234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Setsuo Taniguchi	4．巻 73
2．論文標題 An application of the partial Malliavin calculus to Baouendi-Grushin operators	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 417，431
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.73.417	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計1件

1．著者名 谷口 説男	4．発行年 2021年
2．出版社 朝倉書店	5．総ページ数 292
3．書名 確率幾何解析	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関