

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03339

研究課題名（和文）ワイル群不変な多変数楕円超幾何関数の研究

研究課題名（英文）Study on Weyl group invariant multivariate elliptic hypergeometric functions

研究代表者

伊藤 雅彦（Ito, Masahiko）

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：30348461

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：研究代表者・伊藤は研究協力者・野海正俊(立教大)と楕円超幾何関数に付随する「補間関数」について定義した。A型とBC型についての「補間関数」をそれぞれ定義し、応用として主に以下の成果を得た。1) A型スレーターの公式の多変数化。2) BC型シアーズ・スレーターの公式の多変数化およびBC型楕円超幾何積分の行列式公式の証明。以上が古典型の場合の成果で、例外型の場合の主な成果は、G2型楕円超幾何積分の楕円ガンマ関数表示が証明できたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では楕円超幾何関数の和公式・変換公式を、楕円超幾何関数が満たす差分方程式とワイル群対称性の2点から説明することを目標とした。差分方程式を得るために楕円超幾何関数に付随する「補間関数」について定義した。このことにより、楕円超幾何関数の和公式・変換公式の予想に対して、証明を与えることができた。数理論理学分野の超対称量子場理論における電磁双対性の観点から、電気的、磁氣的に定義される2種類の楕円超幾何積分の間に成立する変換公式(予想)が各ルート系において多数発見されているが、その証明には「補間関数」が有効であることもわかった。

研究成果の概要（英文）：Principal investigator Ito and collaborative researcher Masatoshi Nomi (Kobe University) defined the "interpolation function" associated with elliptic hypergeometric functions. We defined "interpolation functions" for type A and type BC, respectively, and obtained the following main results as applications. 1) An extension of the A-type Slater's formula to that of many variables was obtained. 2) An extension of the BC-type Sears-Slater's formula to that of many variables was obtained and the determinant formula for the elliptic hypergeometric integral of type BC was proved. The above are the results in the case of the classical type, and in the case of the exception type, the elliptical gamma function representation of the G2 type elliptic hypergeometric integration was proved.

研究分野：特殊関数論

キーワード：楕円超幾何関数 ワイル群 ルート系 補間関数 セルバーグ積分 楕円ガンマ関数

## 1. 研究開始当初の背景

オイラーの五角数定理等に端を発し、ラマヌジャンの  $1 - 1$  和公式 ( $q$ -二項定理の拡張) から始まる古典的に知られる一連の  $q$ -超幾何関数の変換公式が、数冊の本になるほど知られているが、それらはとても複雑なものに見えて、また多岐にわたっているため、何か著しいことが起こっていることがわかって、当時の人々の目的意識を理解しがたいところがある。

しかし、1930年代の Bailey や Watson による古典的な very-well-poised  $q$ -超幾何級数の変換公式が、1980年代になって発見された Askey-Wilson 直交多項式の性質によって一つの解釈が与えられたように、古典的な結果が秘める重要性は計り知れない。その後、ワイル群の対称性をキーワードに Askey-Wilson 直交多項式は Macdonald 多変数直交多項式に拡張され、その直交内積を与える積分値を求めること等は 1980~90年代にかけて、この多項式の研究において一つの中心的な話題であった。

このように、ワイル群対称性と  $q$ -差分方程式を手がかりにして、新たなる視点を与えられるような一連の古典的な公式が知られているが、その後 21世紀に入ってから、これら直交系や超幾何級数の楕円関数類似が徐々に発見され始め、この 10年ほどの間に  $q$  だけでなく多重のモジュライを含む、ワイル群の対称性をもつ多変数の超幾何積分および超幾何級数の変換公式が発見されている ( $q$  および  $p$  の二つのモジュライをもつ系を「楕円」と呼ぶ)。本研究は、「楕円」の超幾何積分および級数(以後、両方の総称として「楕円超幾何関数」を用いる)をいかに定義して、既存の結果を統一的な観点で理解できるのかを問う。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、一連の  $q$ -超幾何関数の結果を、 $q$  および  $p$  の二つのモジュライをもつ楕円超幾何関数に対する結果に拡張することである。楕円超幾何関数に対する既知の結果は、ワイル群のルート系が(1)古典型(特に  $BC_n$  型)である場合と(2)例外型(特に  $G_2$ ,  $F_4$  型)である場合とで現在大きく異なっている。

まず、(1)古典型(特に  $BC_n$  型)のワイル群の対称性をもつ楕円超幾何関数に対して多くの結果が発見されている理由の一つは、 $p \rightarrow 0$  や  $q \rightarrow 1$  の極限をとった場合が、古典的に良く知られている二種類の積分公式に関係があるからである。その一つは Dixon-Anderson 積分(1907)と呼ばれるもので、もう一つは Selberg 積分(1944)と呼ばれる。どちらの積分もベータ関数(の積分表示)を多重積分に拡張したもので表され、ベータ関数のようにガンマ関数の積で表示できるという性質がある。Selberg 積分の被積分関数は多変数直交多項式(Jack 多項式)の内積を定義する際の重み関数であり、多体可積分系の固有値問題に深く関係しており、Selberg 積分が満たす差分(微分)方程式系の構造が、本研究の雛形である。一方、Dixon-Anderson 積分の方は、興味深い直交多項式系には関係していないが、Selberg 積分のガンマ関数表示の簡潔な証明は Dixon-Anderson 積分を使うことによってなされることからわかるように、技術的な観点から Dixon-Anderson 積分も Selberg 積分と同様に重要である。さて、この二つの積分の楕円超幾何関数

の類似が van Diejen, Spiridonov, Rains といった研究者らによって発見されていて、Dixon-Anderson 積分および Selberg 積分に対応するものは、それぞれ「楕円超幾何関数 Type I」および「Type II」と呼ばれている。上記の古典的な結果のように「楕円超幾何関数 Type I」から「Type II」の性質が導かれることは研究されていたが、「楕円超幾何関数 Type II」自身の(パラメータに関する)差分方程式系の構造に言及したものは見当たらなかった。しかし、研究代表者・伊藤らは「楕円 Lagrange 補間関数」を定義することによって、「楕円超幾何関数 Type II」の差分方程式系を単独に扱えるようになる例を示した。この方法を発展させて、古典型一般の楕円超幾何関数が満たすホロノミック差分方程式系を 1 階連立差分方程式系で表したときの係数行列を具体的に求めるのが本研究の目標の一つである。「楕円 Lagrange 補間関数」を定義した際、研究協力者・野海正俊(立教大)の表現論および超幾何関数論における協力が不可欠であった。したがって、この部分は伊藤と野海が担当し、 $A_n$  型もしくは  $BC_n$  型の楕円 Lagrange 補間関数の性質を追求する。また「補間関数」はシューア関数、古典群の既約指標をもとに作られていることから、楕円超幾何関数のときには  $p \rightarrow 0$  や  $q \rightarrow 0, 1$  等の極限として、それら指標の間に成立する関係式を理解できる。他にも楕円超幾何関数のときに様々な極限を考えることによって、指標間の関係式が得られると予想される。研究協力者・岡田聡一(名古屋大)は古典型の群の表現論を専門としており、既約指標の組合せ論の研究を続けて来た。したがって、この部分は伊藤と岡田が担当する。

一方、(2) 例外型(特に  $G_2, F_4$  型)のワイル群に関する楕円超幾何関数の結果はほとんど未知と言ってよい。したがって参考になる例外型の  $q$ -超幾何関数の結果は、「無限和 = 無限積」のタイプの公式の他に数例しかない。その理由は、上記の  $BC_n$  型の場合と違い  $p \rightarrow 0$  や  $q \rightarrow 1$  の極限をとったものが古典的に良く知られていないことや、また  $F_4$  型に関してはワイル群の位数が 1152 と比較的大きく、結果の検証にコンピュータの支援が必要であることなどがある。まずは、既存の「無限和 = 無限積」のタイプの公式をもとに、数式処理を駆使しつつ楕円超幾何関数の類似を探る。また例外型の場合にも「補間関数」にあたる概念を定義し、最終的には数式処理によらずに楕円類似の公式を発見、証明するのが目的である。

### 3. 研究の方法

- (1)  $A_n$  および  $BC_n$  型楕円超幾何関数が満たすホロノミック差分方程式系を 1 階連立差分方程式系で表したときの係数行列を求める。
- (2) 上記差分方程式系の基本解から作られるロンスキー行列式を楕円ガンマ関数の積で表示する。
- (3) 上記差分方程式系の一般解を基本解の一次結合で表示する公式(接続公式)の係数を具体的に決定する。
- (4) 上記ロンスキー行列式および接続公式の  $p \rightarrow 0$  や  $q \rightarrow 0, 1$  の極限をとり、その結果がシンプレクティック群の既約指標とどのように関係しているか調べる。
- (5)  $G_2, F_4$  型楕円超幾何関数が満たす和公式および変換公式を発見する。
- (6) 応用として、楕円への拡張に伴い、多変数直交多項式系(マクドナルド多項式)や多体可積分系の固有値問題が、どのように拡張されるのかを考察する。

#### 4. 研究成果

研究代表者・伊藤は研究協力者・野海と楯円超幾何関数に付随する「補関数」について定義し、 $A_n$  型 Jackson 積分への応用を行った。具体的には、(1)  $A_n$  型 Jackson 積分が満たす  $q$ -差分方程式系のロンスキー行列式が無限積で具体的に表示できること ( $q$ -ガンマ関数を使った積表示)、(2)  $q$ -超幾何級数の変換公式として知られる Slater の公式が、 $A_n$  型 Jackson 積分が満たす  $q$ -差分方程式系の解の接続公式として理解できること、を示した。この成果をまとめ雑誌 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. から出版した。

さらに、伊藤と野海は  $BC_n$  型楯円超幾何関数が満たすホロノミック差分方程式系について現在まで得られている成果を、数理解析研究所講究録 (2071) から出版した。楯円超幾何関数に付随する「補関数」の応用として、 $BC$  型楯円超幾何関数についてのロンスキー型行列式が楯円ガンマ関数の積で具体的に表示できることを示した。その公式についての論文が雑誌 Journal of Mathematical Physics から出版された。

また、伊藤と野海は例外型ルート系  $G_2$  に付随した楯円超幾何関数について研究した。その出発点として、 $G_2$  型の  $q$ -超幾何関数の無限積表示として知られる Gustafson の公式 (1994) の楯円類似を発見し、その証明を与えた。その成果を、2018 年度秋季総合分科会 (於：岡山大学) 「無限可積分系セッション」において発表した。また、2 回の国際ワークショップ「Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory (NORDITA, Stockholm)」と「15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications, 2019 (Hagenberg, Austria)」にて発表した。また、オーストラリア・メルボルン大・数理統計学科の Random Matrix Theory Seminar でも解説を行った。伊藤と野海は 5 パラメータの  $G_2$  型楯円超幾何積分の無限積表示を拡張するために、6 パラメータの  $G_2$  型楯円超幾何積分の性質を調べた。その結果、6 パラメータの  $G_2$  型楯円超幾何積分が満たす  $q$ -差分方程式を具体的に表示することができた。この  $G_2$  型楯円超幾何積分の 1 つのパラメータを特殊化することで、前年に得た 5 パラメータの結果に於いても別証明が得られる。以上の成果を、神戸大学で行われた研究集会「 $q, q & q$ 」で発表した。この成果は 2020 年度日本数学会年会 (於：日本大学) 「無限可積分系セッション」のabstract集に於いても記録されている。5 パラメータの  $G_2$  型楯円超幾何積分の無限積表示についての論文は雑誌 Advances in Mathematics から出版された。この結果は、Spiridonov-Vartanov による数理解析の超対称量子場理論における電磁双対性 (予想) の特別な場合に証明を与えている。

また、伊藤は澤岷大和 (琉球大・大学院生) と 6 パラメータの  $G_2$  型  $q$ -超幾何積分の性質を調べた。その結果、6 パラメータの  $G_2$  型  $q$ -超幾何積分が満たす  $q$ -差分方程式を具体的に表示することができた。この  $G_2$  型  $q$ -超幾何積分の 2 つのパラメータを退化させることで、Gustafson の 4 パラメータの  $G_2$  型  $q$ -超幾何積分の無限積表示についての別証明が得られる。以上の成果を、雑誌 Ryukyu Mathematical Journal から出版した。

その他、伊藤は対称 Selberg 型 ( $A_n$  型) Jackson 積分が満たす  $q$ -差分方程式系の具体的表示を得た。これは Heine の  $q$ -超幾何関数  $2-1$  が満たす隣接関係式の自然な拡張になっている。

この  $q$ -差分方程式系は、階数  $n+1$  の 1 階連立  $q$ -差分方程式系で表示でき、その方程式の基底としては、松尾厚(東京大学)が  $q$ -KZ 方程式の研究で導入した「松尾基底」を用いた。松尾基底は、その零点の情報から、本研究で導入された「補間関数」によって特徴付けができ、補間関数が満たす 3 項間関係式が  $q$ -差分方程式系 of 具体形を証明する鍵となる。この結果は雑誌 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. から出版された。

伊藤は、超幾何関数の新たなる楕円の拡張の可能性を調べるために、研究協力者・青本和彦(名古屋大・名誉教授)と超球面配置に付随する超幾何関数を研究した。超球面配置に付随する超幾何関数とは、超幾何関数の積分表示において被積分関数が超球面を表す二次多項式のべき乗の積になっているものを指す。超球面配置に付随する超幾何関数についてはあまり多くは知られていないため、従来の超平面配置に付随する超幾何関数の結果から類推して、いくつかの基本的な予想を立てた。超球面配置を特殊な配置にしたときに、その予想が成立することを確かめた。超球面を 2 次元と 3 次元にし、超球面の数、それぞれの超球面の位置関係に対称的な制限を課した場合に、計算によって予想が成立することを確かめられ、そのことを 2 本の論文として発表した。2 次元の場合の成果は、イタリアで行われた国際会議「MathemAmplitude 2019: Intersection Theory and Feynman Integrals」の査読付きプロシーディングとして出版した。3 次元の場合の成果は、雑誌 Symmetry (特集号 Symmetries of Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials) から出版した。また、これらの成果は 2022 年度日本数学会年会(於: 埼玉大学)「無限可積分系セッション」の抽象集に於いても「球面配置に付随する超幾何積分の準位関数  $F$  から定まる臨界点における  $F$  のヘッセ行列式の積について」として記録されている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kazuhiko Aomoto, Masahiko Ito	4. 巻 383
2. 論文標題 Product of Hessians and Discriminant of Critical Points of Level Function for Hypergeometric Integrals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of Science	6. 最初と最後の頁 no.9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.22323/1.383.0009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiko Aomoto, Masahiko Ito	4. 巻 14
2. 論文標題 Product of Hessians and Discriminant of Critical Points of Level Function Attached to Sphere Arrangement	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 symmetry	6. 最初と最後の頁 no.374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/sym14020374	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Ito, Masatoshi Noumi	4. 巻 370
2. 論文標題 Elliptic extension of Gustafson's q-integral of type G2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.107211	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Ito	4. 巻 16
2. 論文標題 q-Difference Systems for the Jackson Integral of Symmetric Selberg Type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.	6. 最初と最後の頁 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2020.113	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Ito, Yamato Takushi	4. 巻 33
2. 論文標題 q-Difference equations for q-hypergeometric integrals of type G2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ryukyu Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1--59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Ito, Masatoshi Noumi	4. 巻 60
2. 論文標題 A determinant formula associated with the elliptic hypergeometric integrals of type BCn	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5094116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Ito, Masatoshi Noumi	4. 巻 14
2. 論文標題 Connection formula for the Jackson integral of type An and elliptic Lagrange interpolation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.	6. 最初と最後の頁 42pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 伊藤雅彦 野海正俊	4. 巻 2071
2. 論文標題 楕円超幾何積分と楕円補間函数 -- q Selberg 積分から楕円 Selberg 積分へ --	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 40--65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 青本和彦 伊藤雅彦
2. 発表標題 球面配置に付随する超幾何積分の準位関数Fから定まる臨界点におけるFのヘッセ行列式の積について
3. 学会等名 日本数学会年会「無限可積分系セッション」（於：埼玉大学）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiko Ito
2. 発表標題 Elliptic extension of Gustafson's q-integral of type G2
3. 学会等名 Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory (NORDITA, Stockholm) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Ito
2. 発表標題 Elliptic extension of Gustafson's q-integral of type G2
3. 学会等名 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications, OPSFA2019 (Hagenberg, Austria) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤雅彦
2. 発表標題 G2型楕円超幾何積分が満たすq差分方程式について
3. 学会等名 研究集会「q, q & q」（於：神戸大学）
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 伊藤雅彦 野海正俊
2. 発表標題 6パラメータのG2型楕円超幾何積分が満たすq差分方程式系について
3. 学会等名 日本数学会年会「無限可積分系セッション」(於: 日本大学)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiko Ito
2. 発表標題 Elliptic extension of Gustafson's q-integral of type G2
3. 学会等名 RMT Seminar, University of Melbourne, Australia
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 伊藤雅彦 野海正俊
2. 発表標題 G2型Gustafson q-ベータ積分の楕円化とその無限積表示について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会「無限可積分系セッション」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤雅彦
2. 発表標題 ワイル群不変な q-超幾何積分
3. 学会等名 表現論と特殊函数セミナー 2019 沖縄
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	野海 正俊 (Noumi Masatoshi) (80164672)	立教大学・理学研究科・特任教授  (32686)	
研究協力者	岡田 聡一 (Okada Soichi) (20224016)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授  (13901)	
研究協力者	青本 和彦 (Kazuhiko Aomoto)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------