様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １３ 日現在

機関番号：２４５０６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８K０３３４０

研究課題名（和文）１階偏微分方程式系のスペクトル解析の新展開：ディラック、マックスウェルを超えて

研究課題名（英文）New developments of spectral analysis for systems of first order partial differential operators; beyond Dirac and Maxwell

研究代表者
　楳田　登美男（Umeda, Tomio）

　兵庫県立大学・理学研究科・特任教授（名誉教授）

　研究者番号：２０１６０３１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：Dirac方程式とMaxwell方程式はどちらも１階偏微分方程式系であるが、一方が斉次型であるのに対し、他方は非斉次型であり、そのため通常は取り扱い方が異なる。本研究では両方の一般化になっている一つの新しいクラスの１階偏微分方程式系を考案し、極限吸収原理、スペクトル密度関数のヘルダー連続性、平滑化評価式を導いた。これら３つの成果はスペクトル理論における重要課題を構成するものの一部である。結果として、Dirac方程式、Maxwell方程式の両方を統一的な手法でスペクトル解析を行った。Dirac作用素を摂動を加えた場合には、スペクトル・ギャップには高々有限個の固有値しか存在しないことも示せた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Dirac方程式は高速で運動する電子を記述し、またMaxwell方程式は電磁気学における基礎方程式である。固体中を高速で移動するDirac電子は半導体などの電子デバイスへの応用が期待されていて、そのために実験・理論計算の両面から研究が進められている。現在、社会的に大きな関心を集めている核融合発電には電磁気学が理論的観点から重要な役割を演じるが、核融合炉内では電子が高速で運動することから相対論的量子力学（Diracの電子理論）の観点も重要である。それゆえ、Dirac方程式、Maxwell方程式を統一的観点から調べる本研究は数学や数理物理学の枠を大きく超えて学術的、社会的な意義を有すると考える。

研究成果の概要（英文）：We consider a new class of first order systems of partial differential equations, which covers both Dirac and Maxwell equations. Since Dirac equations and Maxwell equations are of different types, one usually needs to treat these two in separate manners. In this project, we introduce a new technique which enables us to deal with the new class of first order systems in a unified manner. In particular, we were successful to handle Dirac and Maxwell equations at the same time. More precisely, we established the limiting absorption principles, proved the Hoelder continuity of spectral density, and derived the so-called smoothing estimate (global space time estimates in my language). The finiteness of the eigenvalues in the spectral gap of the perturbed Dirac operator is also studied under suitable decay assumptions on the potential perturbation.

研究分野：スペクトル理論

キーワード：ディラック作用素　マックスウェル作用素　極限吸収原理　時空大域的評価　固有値の有限性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

1966 年 に発表された C.H. Wilcox の論文“Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics, Arch. Rat. Mech. Anal. 22 (1966), 37-78”では Maxwell 方程式の直接的な一般化になっている1階偏微分方程式系（1階偏微分方程式を連立させたもの）を考察している。これが1階偏微分方程式系の研究の始まりである。この論文では、系は低階項を持たないこと、また一様伝播系であることが仮定されていた。 その後のおよそ３０年間に何人かの研究者（K. Mochizuki 1969、J.R. Schulenberger & C.H. Wilcox 1972、1978、K. Yajima 1974、M. Murata 1979、H. Tamura 1981、R. Weder 1984、1985 等）によって Maxwell 方程式の一般化となる様々な定数係数1階偏微分方程式系が考察され、一様伝播系、および、より広範な枠組みである強伝播系に対して、極限吸収原理を中心に、散乱理論を含むスペクトル理論が展開された。この研究の流れとは別に Maxwell 方程式独自の性質を探る研究も存在した（N. Filonov & F. Klopp 2005 等）。しかし、低階項を持つ一般1階偏微分方程式系が研究されることはなかった。低階項を持てば、その系は強伝播系にならないことが理由だと思われる。さらに、1990 年代に入ってからは、1階偏微分方程式系の研究そのものが忘れ去られたような状況であった。

他方、Dirac 方程式は1階偏微分方程式系の一例と見なせるものの、低階項を持つことから1階偏微分方程式系の一般論からのアプローチはなく、Dirac 方程式に限定して、極限吸収原理を中心とするスペクトル理論が盛んに研究されてきた（O. Yamada 1972、こちらは研究者数、研究論文とも多すぎるので、創始者のみ）。Dirac 方程式に対する研究は言わば独自の発展と遂げてきた。

以上に述べたことから推測できることであるが、Maxwell 方程式を典型例とする一様伝播系、強伝播系に対するスペクトル理論と、Dirac 方程式に対するスペクトル理論との両方を包含するような理論は本研究が開始されるまで存在しなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は、低階項を持つ1階偏微分方程式系のスペクトル理論を展開することである。したがって、強伝播系より遥かに一般的な1階偏微分方程式系を論ずることになるし、強伝播系であるかどうかを問わないような理論を打ち立てることにした。このうような1階偏微分方程式系に対して、極**限吸収原理を確立するのが目的の一つである。したがって、タイプの異なる２つの**1階偏微分方程式系（Dirac 方程式と Maxwell 方程式）を一挙に取り扱える一般理論を打ち立てることになる。

もう一つの目的は、上と同様に、強伝播系より遥かに一般的な（したがって、低階項を持ちうる）1階偏微分方程式系に対して、**平滑化評価式を導くことである。本研究の開始までは、**一様伝播系はおろか Maxwell 方程式に対してすら、平滑化評価式の成立が問われることはなかった。平滑化評価式は偏微分方程式の解の時空間評価式の一種である。この種の研究の幕開けは R.S. Strichartz（1977）による評価式であり、Shroedinger 方程式の解に対して非常に盛んに研究されてきた。この評価式はさらに一般化されて、**単独の（分散型）２階偏微分方程式の解に対してもけんきゅうされるようになった。しかし、連立の**1階偏微分方程式の解に対して論じられることはなかった。本研究の目的の一つとしている平滑化評価式は解の時空間評価式であるが Strichartz のものとは別種の時空間評価式である。

３．研究の方法

極**限吸収原理の確立に関する手法を一言で言えば、スペクトル密度関数の表示を用いるものである。そのために、低階項を持つ定数係数**1階偏微分方程式系をフーリエ空間に写す。その結果として得られる行列値関数の固有値と固有射影作用素がフーリエ変数にどのように依存するかを調べる。この依存性に基づいて、**スペクトル測度を具体的に構成し、この構成を用いてスペクトル密度関数を具体的に積分の形で表示する。得られた積分表示に、**Ben-Artzi 教授（イスラエル・ヘブライ大学）の考案による関数解析学的抽象理論を組み合わせて、**極限吸収原理の確立につなげる。**

平滑化評価式の導出については、Maxwell 方程式、**強伝播型定数係数**1階偏微分方程式系、そして Dirac 方程式はそれぞれ異なる工夫を要する。いずれの方程式についても、時空間における2乗可積分関数が作る関数空間で、方程式に応じた2次形式を導入し、Cauchy-Schwarz の不等式、および Plancherel の定理を応用して平滑化評価式を導く。いずれの方程式についても前述の Ben-Artzi 教授と Devinatz 教授（アメリカ・ノースウェスタン大学）が 1980 年代末に開発した手法に基づいている。

４．研究成果

多岐にわたるので箇条書きにする。

１）強伝播型定数係数1階偏微分方程式系に対する極限吸収原理
２）定数型低階項を持つ定数係数等方的1階偏微分方程式系に対する極限吸収原理
３）強伝播型定数係数1階偏微分方程式系にポテンシャル型摂動を加えた作用素に対する極限吸収原理
４）ポテンシャル型摂動を加えた Dirac 作用素に対する極限吸収原理
５）Dirac 作用素に対する平滑化評価式
６）Maxwell 作用素に対する平滑化評価式
７）強伝播型定数係数1階偏微分方程式系に対する平滑化評価式
。

項目「２．研究の目的」で述べた事項のうちで、一つだけ達成できなかったことがある：強伝播系より遥かに一般的な1階偏微分方程式系に対する**平滑化評価式**

上に述べた７つの研究成果のうち、２）と３）、４）に説明を加える。２）で言うところの「定数型低階項」は摂動とは見なせない。３）、４）に現れる「ポテンシャル型摂動」は空間の無限遠方で減衰するタイプを想定しており、定数項低階項とは見なせない。したがって、２）と３）、４）では、取り扱いの方法が本質的に大きく異なっている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 M. Ben-Artzi, T. Umeda	４．巻 33
２．論文標題 Spectral theory of first-order systems: From crystals to Dirac operators	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 2150014(1-52)
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X21500148	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Tomio Umeda
２．発表標題 Space-time decay estimates for strongly propagative systems: From Maxwell to Dirac
３．学会等名 Workshop 'Spectral analysis and quantum theory'（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Tomio Umeda
２．発表標題 Space-time decay estimates for strongly propagative systems: From Maxwell to Dirac
３．学会等名 Chile-Japan workshop on mathematical physics and partial differential equations（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 梅田登美男
２．発表標題 Coarea formula and spectral densities
３．学会等名 第25回超局所解析と古典解析
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	山岸　弘幸 (Yamagishi Hiroyuki) (10448053)	東京都立産業技術高等専門学校・ものづくり工学科・准教授 (52605)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Himeji Conference of Partial Differential Equations 2023	2023年～2023年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関