

令和 3 年 4 月 15 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K03342

研究課題名(和文) 解析的手法による拡散過程の研究

研究課題名(英文) Study on diffusion processes by analytical methods

研究代表者

松本 裕行 (Matsumoto, Hiroyuki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：00190538

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：正定値行列の空間上のラプラス-ベルトラミ作用素が岩澤座標を用いると簡明な形に表現され、対応する拡散過程であるブラウン運動もウィナー汎関数として具体的に表現できることを示した。さらに、行列式の作る確率過程が幾何ブラウン運動であることを示し、最大、最小固有値の作る確率過程の長時間漸近挙動に関して従来知られていた大数の法則に相当する結果を中心極限定理に相当する結果に拡張した。二次元拡散過程の中でラプラス-ベルトラミ作用素を生成作用素とする拡散過程を考察したが、係数に滑らかさを仮定した場合にブラウン運動の時間変更で表現できるという従来の結果以上のことを得ることはできなかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正定値行列は多変量解析の分野では共分散行列として現れる。また、この行列全体は対称空間、等質空間の重要な例として古くから研究されてきた。このような様々な方向から考察される空間においてラプラス-ベルトラミ作用素の簡明な形を与えることは、セルバーグ跡公式などへの応用が考えられる重要な結果だと考えている。一次元拡散過程が常に一次元ブラウン運動の時間変更で表現され、三次元以上の場合は生成作用素がラプラス-ベルトラミ作用素でもブラウン運動の時間変更では書けないことから、二次元拡散過程はどちらも異なる重要な研究対象である。等温座標の存在に深く関係するという意味でも重要であると思われる。

研究成果の概要(英文)：I showed that the Laplace-Beltrami operator on the space of positive definite matrices is represented in a simple way by using the Iwasawa coordinate and that the corresponding diffusion process, called the Brownian motion, may be expressed explicitly as a Wiener functional. Moreover, it is shown that the determinant process is a geometric Brownian motion. We also studied the long time asymptotic behavior of the largest and the smallest eigenvalue processes and showed a central limit theorem, if we regard the corresponding known results as a law of large numbers. Part of this work is a joint one with a Master course student, Jun Otani.

Some years ago, I proved that two dimensional diffusion processes which are generated by the Laplace-Beltrami operators are obtained by time change of usual two-dimensional Brownian motion under additional assumptions. I tried to go further, but I could not obtain a better result.

研究分野：確率論

キーワード：拡散過程 生成作用素 ラプラス-ベルトラミ作用素 ブラウン運動

1. 研究開始当初の背景

ベッセル過程の到達時刻に関して Ito-McKean による著書に書かれている古典的な結果に加えてベッセル過程に対する Hunt の研究が、さらに内山耕平教授(東工大)の研究や濱名裕治教授(筑波大学)と研究代表者の共同研究によって一定程度の研究が進み基本的な結果は得られていた。

代表者は双曲空間上の確率解析を進め、ポアンカレ上半平面上のセルバーグ跡公式の研究も行ってきた。これらは谷口説男教授(九州大学)との多くの議論に基づくもので、二人の著書にも述べた。本研究開始時は、双曲空間に続いて等質空間、対称空間上の確率解析を展開するため、正定値行列上のラプラス-ベルトラミ作用素について研究代表者が集中して考察を始めた時期であった。Terras による著書など基本的な文献は揃っており課題をもって研究を開始していたが、結果を得るには至っていなかった。正定値行列の空間上のブラウン運動の固有値過程に関しては、Dynkin や折原明夫によって調和解析による研究がなされ、固有値過程の指数増大、指数減少が証明され指数の値も知られていた。Norris-Rogers-Williams は確率解析を用いて同様の結果を得ていたが、ラプラス-ベルトラミ作用素を生成作用素としないが同じ固有値過程をもつ拡散過程を考察していた。

一元拡散過程が標準ブラウン運動の時間変更で表現できることは上述の Ito-McKean による著書に詳細な記述がある古典的な事実であり、研究代表者は著書でも触れるなど経験を積んでいた。研究開始の前に、多次元の場合にどうなるのかについて故池田信行教授(大阪大学)から問題提起を受けていた。等温座標を用いて考察するという考えは、小松玄教授(大阪大学)から池田教授を介して聞いており、三次元以上の場合には反例を容易に作る事ができた。これは発表するまでもないことと認識していた。したがって、二次元の場合が問題となることを認識し、二次元の拡散過程が二次元標準ブラウン運動の時間変更で表現されるための必要十分条件が、生成作用素がラプラス-ベルトラミ作用素であることを、係数が滑らかであるという仮定の下で証明できた。ただし、十分性に関しては池田教授と渡辺信三教授(京都大学)の結果から分かることである。全体に擬等角写像の一般論に大きく依存する形の結果であり、拡散過程の構成から始め問題が多くあると考え始めていた。

2. 研究の目的

ベッセル過程の到達時刻に関しては、その確率分布に対する尾確率の精密な評価を得ること、確率分布に対する表現や漸近挙動に関する研究結果を変形ベッセル関数の特徴の解析に応用することが目的である。また、Alili 教授(Warwick 大学)との共同研究では、ベッセル過程のある種の決定論的な曲線への到達時刻を考察し、Yor 教授(パリ大学)の結果の拡張を試みることを目標とした。

正定値行列の空間上の岩澤座標を用いたラプラス-ベルトラミ作用素の表示が簡明な形をしているかどうかを見るのが第一の目的であった。それに応じて確率解析を行おうとしていた。成分が独立確率変数であるランダム行列やウイシャート行列などと同様に、固有値に関してその性質が分かるかどうか考察することは目標の一つであった。

二次元拡散過程については、一次元拡散過程に対する正則点という概念に相当し、考察する拡散過程の自然なクラスを探ることが第一の目標であった。その中で、一次元と同様に標準ブラウン運動の時間変更で記述されるクラスを決定することが次の目標であった。また、生成作用素の係数として測度がとれるような二次元拡散過程の例を構築して一般論へつなげることも目標とした。

3. 研究の方法

ベッセル過程、ベッセル関数に関しては、濱名裕治教授、白井朋之教授(九州大学)との共同研究を、電子メールによる日常的な研究連絡を基礎に、研究当初は関連する研究集会に出席した際の議論や相互訪問も行って遂行した。Alili 教授(Warwick 大学)とは電子メールによってノートを行き来させる形により研究を進めた。

正定値行列の空間上の解析は、修士課程の学生であった大谷潤氏との議論と大谷氏による計算機を用いた計算と合わせて、共同研究の形で進めた。まず、Terras や Maass による著書に書かれた次元に関するラプラス-ベルトラミ作用素の帰納的な関係を理解するために、二次元と三次元の場合の具体的な計算を計算機ソフトを援用しながら行い、次元が変わる際の様々な量の変化を追うことから始めた。

二次元拡散過程は個人の研究であり、擬等角写像に関する事実の確認と証明を精査することをまず行った。また、微分方程式の対応する研究結果について文献調査し、関連する結果についてまとめた。これらと平行して、複素関数論に詳しい谷口説男氏と電子メールや相互訪問による議論などを参考にしながら個人的に進めた。

4. 研究成果

ベッセル関数の到達時刻については、従来の研究を進め、より詳しい尾確率の研究や変形ベッセル関数の零点の研究へつなげ、以下の論文の形で発表した。

・Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes (with Hamana), Tokyo J. Math., Vol. 41 (2018), 603--615. DOI:10.3836/tjm/1502179246

・Further studies on square-root boundaries for Bessel processes (with L. Alili), Electron. Commun. Probab., Vol. 23 (2018), no.39, 1--9. DOI: 10.1214/18-ECP139

・On the zeros of the Macdonald functions (with T. Shirai and Y. Hamana), Opuscula Math., Vol. 39, no. 3 (2019), 361--382. DOI: 10.3836/tjm/1502179246

正定値行列の空間上のラプラス-ベルトラミ作用素が岩澤座標を用いると簡明な形に表現され、対応する拡散過程であるブラウン運動もウィナー汎関数として具体的に表現できることを示した。そのために、二次元の場合を具体的にすべて計算し、三次元の場合は計算機も用いてすべての量を計算することにより知られていた次元に関する帰納的な関係を明らかにした。さらに、行列式の作る確率過程が幾何ブラウン運動であることを示し、最大、最小固有値の作る確率過程の長時間漸近挙動に関して、1. に述べた従来知られていた大数の法則に相当する結果を中心極限定理に相当する結果に拡張した。近日中に、論文の形で結果を公表したいと考えている。

一次元拡散過程が常に一次元ブラウン運動の時間変更で表現され、三次元以上の場合は生成作用素がラプラス-ベルトラミ作用素でも一般にはブラウン運動の時間変更では表現できないことから、二次元拡散過程はどちらとも異なる重要な研究対象である。等温座標のもとで考えるというアイデアのもとで、二次元拡散過程の生成作用素がラプラス-ベルトラミ作用素である場合を考察した。係数に滑らかさを仮定した場合に、このことがブラウン運動の時間変更で表現できることの必要十分条件であるという従来の(未発表の)結果以上のことを得ることはできなかった。結果の一部は、研究集会において発表した。論文の形にするには不十分であると考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Y. Hamana, H. Matsumoto	4. 巻 41
2. 論文標題 Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tokyo J. Math.	6. 最初と最後の頁 603-615
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 L. Aili, H. Matsumoto	4. 巻 23
2. 論文標題 Further studies on square-root boundaries for Bessel processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Electron. Commun. Probab.	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/18-ECP139	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Hamana, H. Matsumoto, T/ Shirai	4. 巻 39
2. 論文標題 On the zeros of the Macdonald functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Opuscula Math.	6. 最初と最後の頁 361-382
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7494/OpMath.2019.39.3.361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 松本裕行
2. 発表標題 2次元拡散過程について
3. 学会等名 関西確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------