

令和 5 年 5 月 24 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03343

研究課題名（和文）確率的変分問題の離散化とスケール極限

研究課題名（英文）Discretization and scaling limit for problems of stochastic calculus of variations

研究代表者

市原 直幸 (Ichihara, Naoyuki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：70452563

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：幾何光学や最速降下曲線に起源を持つ古典的な変分問題の確率版である確率的変分問題について、ポテンシャル項の摂動に対して最適軌道の長時間挙動がどのように変化するののかについての数学的な結果を得た。具体的には、最適軌道の長時間挙動が大きく変化するための条件をモデルに内在するパラメータを用いて与えるとともに、最適軌道の詳しい振る舞いを特徴づけた。また、上記の確率的変分問題に対する離散モデルを構築し、同種の現象が離散モデルでも再現できることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連続型確率的変分問題の臨界性理論に関する既知の結果を大幅に改善することができた。特に、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の性質や確率的変分問題の最適軌道に関する精密な評価式を得ることができた。また、これまではあまり考察されてこなかった確率的変分問題の離散版に相当するモデルを構築することができた。これらの結果より、確率的変分問題の臨界性理論に関する研究のさらなる学術的な進展が期待される。

研究成果の概要（英文）：We obtained some mathematical results on the problem of stochastic calculus of variations, which is a stochastic version of the classical problem of calculus of variations originating from geometric optics and brachistochrone. We investigated how the long time behavior of the optimal trajectory changes with a perturbation of the potential term and gave, in terms of the parameters in the model, an explicit condition for a phase transition. We also constructed a discrete model corresponding to the above continuous problem and showed that similar phenomena can be observed in that model.

研究分野：確率論

キーワード：確率的変分問題

1. 研究開始当初の背景

確率最適制御問題の特別な場合である確率的変分問題は、幾何光学や最速降下曲線に起源を持つ古典的な変分問題にランダムな摂動が加わったものである。なかでも本研究課題の考察対象である臨界性理論は、確率的変分問題に対する最適軌道の長時間挙動が力学系の摂動に対して何らかの意味での安定性を持つのかについて考察する問題と捉えることができる。

確率的変分問題に対する臨界性理論の研究は、線形の偏微分作用素に対する臨界性理論の非線形拡張として 2010 年代に研究が開始された。これらの研究では連続変数に対する臨界性理論が主に考察の対象であったが、同種の問題に対する離散変数版がどのような形で定式化され得るのかは明らかでなく、研究開始当初においては適当な離散モデルは存在しなかった。そこで、連続型の確率的変分問題に対応する適切な「離散型」の確率的変分問題を定式化し、得られた離散モデルからスケール極限により連続モデルが導出できるかどうかを考察することが興味のある研究対象であった。

2. 研究の目的

前項を踏まえた上で、本研究の目的は連続型、離散型の双方に対する確率的変分問題の臨界性理論を考察し、それらの関係性を明らかにすることである。特に、長時間平均型(エルゴード型)の評価基準汎関数を持つ確率的変分問題に対して離散と連続を繋ぐ方法を模索する。

3. 研究の方法

連続型と離散型では用いる手法が異なるため、これらの問題を別々に調べる。まず、連続型の確率的変分問題に対する臨界性理論を考察する。具体的には、内向きドリフト、優線形ハミルトニアン、多項式減衰ポテンシャルを持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の一般化主固有値がポテンシャル項の摂動に対して漸近的にどのように振る舞うのかについて調べる。次に、連続型の場合に展開された臨界性理論に対して、その離散版に相当するモデルを構築し、一般化主固有値の振る舞いを調べる。最後に、適当なスケール極限により離散モデルから連続モデルが導出できるかどうかを考察する。

4. 研究成果

本研究課題に関して得られた主要な結果は以下の通りである。

- (1) 連続型確率的変分問題。内向きドリフト、優線形ハミルトニアン、多項式減衰ポテンシャルを持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対して、ポテンシャル項の摂動に関する一般化主固有値の漸近挙動(スペクトル関数)および対応する確率的変分問題の最適軌道に関する定性的な性質について、次の成果を得た。

内向きのドリフト項が有界でない場合の精密評価。先行研究で既に得られていた一般化主固有値の増大度に関する評価式を大幅に改善する精密な評価を得た。特に、一般化主固有値の増大指数および主要項の係数をドリフト項の増大度、優線形のハミルトニアンの増大指数、ポテンシャル項の減衰度に含まれる 3 つのパラメータを用いて具体形に特定した。

内向きのドリフト項が有界の場合のプラトー現象。ドリフト項が有界な場合に、スペクトル関数のグラフが平坦な部分(プラトー)を持つための必要十分条件を前項の 3 つ

のパラメータを用いて特徴付けた。

内向きドリフト項が有界の場合の精密評価．スペクトル関数がプラトーを持たない場合に，スペクトル関数に関する精密な漸近評価を導出した。

一般化主固有値の特徴づけ．エルゴード型確率的分岐問題の最適値はエルゴード型粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の一般化主固有値に等しいことを証明した。

粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の勾配評価．粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の勾配評価に関する新しい評価式を導出し，解の空間遠方での増大度に関する詳しい性質を明らかにした。

最適軌道の相転移．最適軌道の再帰性・過渡性が反転するための必要十分条件を，ドリフト項の強度，ポテンシャル項の空間遠方での減衰度，空間次元の 3 つのパラメータで特徴付けた。

不変測度の可積分性．最適軌道が再帰的である場合に，不変測度の可積分性に関する結果を得た。

- (2) 離散型確率的分岐問題．連続型の確率的分岐問題に対応する離散モデルとして，Kullback-Leibler ダイバージェンスをある種のペナルティ項として持つ有限状態マルコフ決定過程を考察し，値関数の満たす最適性方程式(非線形差分方程式)の解の長時間挙動および割引因子消滅極限に関する以下の結果を得た。

最適性方程式の解の特徴づけ．適当な初期条件のもとで，最適性方程式の解は一般化主固有値の値に応じて 3 種類の異なる振る舞いを示すことがわかった．具体的には，エルゴード問題の一般化主固有値が負ならば，最適性方程式の解は定常問題の最小解に収束し，正ならばエルゴード問題のある解に収束することがわかった．さらに，エルゴード問題の一般化主固有値が零の場合は，最適性方程式の解は正の無限大に対数オーダーで発散することを示した．このことから，終端時刻が十分大きい場合の有限期間マルコフ決定過程は，吸収状態の存在により最適戦略が大きく変化することがわかった。

吸収状態を持つ無限期間マルコフ決定過程に対する割引因子消滅極限．割引因子を限りなく 1 に近づけるとき，エルゴード問題の一般化主固有値が正ならば値関数は吸収状態を持たない長時間平均型のマルコフ決定過程に対応するベルマン方程式の解に収束し，吸収状態で停止するマルコフ決定過程に対応するベルマン方程式の解に収束することがわかった．一方，一般化主固有値が 0 のときは，値関数は無限大に発散することを示し，発散する増大度に関する評価式を得た．この結果から，割引因子消滅極限における値関数の挙動は前項で述べた解の長時間挙動と類似の性質を持つことがわかった。

以上の結果から，本研究課題により連続型確率的分岐問題の臨界性理論に関する詳しい性質が明らかになった．また，この連続モデルに対応する適切な離散モデルを構築することができた．一方で，離散モデルと連続モデルをつなぐスケール極限の方法については完全には解明することができなかった．この点については今後の研究課題としたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chasseigne Emmanuel, Ichihara Naoyuki	4. 巻 29
2. 論文標題 Sharp estimates of the generalized principal eigenvalue for superlinear viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-022-00769-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ichihara Naoyuki	4. 巻 2
2. 論文標題 Phase transitions arising in stochastic ergodic control associated with viscous Hamilton-Jacobi equations with bounded inward drift	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SN Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-021-00072-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ichihara Naoyuki	4. 巻 84
2. 論文標題 Convergence of Value Functions for Finite Horizon Markov Decision Processes with Constraints	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Mathematics & Optimization	6. 最初と最後の頁 2177-2220
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00245-020-09707-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 市原 直幸	4. 巻 64
2. 論文標題 確率制御に現れる「相転移」とエルゴード型HJB方程式	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 システム / 制御 / 情報	6. 最初と最後の頁 246-251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11509/isciesci.64.7_246	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chasseigne Emmanuel, Ichihara Naoyuki	4. 巻 57
2. 論文標題 Ergodic Problems for Viscous Hamilton-Jacobi Equations with Inward Drift	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Control and Optimization	6. 最初と最後の頁 23-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/18M1179328	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Ergodicity of optimal feedback diffusions for stochastic ergodic control problems with inward drift
3. 学会等名 The 53rd ISCTE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (SSS '21) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 市原 直幸
2. 発表標題 内向き有界ドリフトを持つエルゴード型確率制御に現れる相転移について
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 市原 直幸
2. 発表標題 Generalized principal eigenvalues for viscous Hamilton-Jacobi equations with bounded inward drift
3. 学会等名 応用解析研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 E. Chasseigne, 市原直幸
2. 発表標題 内向きドリフトを持つ粘性Hamilton-Jacobi方程式に対する一般化主固有値の精密評価について
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Sharp estimates of the generalized principal eigenvalue for superlinear viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 市原直幸
2. 発表標題 境界条件を持つ有限期間のマルコフ決定過程に対する値関数の収束について
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift
3. 学会等名 Conference on PDEs, Dynamical Systems and Probability（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift
3. 学会等名 International Conference "'Viscosity Solutions and Related Topics'" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift
3. 学会等名 Workshop on "'Stochastic partial differential equations and related topics'" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naoyuki Ichihara
2. 発表標題 Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift
3. 学会等名 The tenth meeting on Probability and PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 市原直幸
2. 発表標題 内向きドリフト項を持つ確率的変分問題の最適軌道とHJB方程式の一般化主固有値について
3. 学会等名 東京確率論セミナー
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Naoyuki Ichihara's website
<https://sites.google.com/site/naoyukiichihara/home?authuser=0>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	University of Tours			