

令和 5 年 4 月 28 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03344

研究課題名（和文）確率順位付けモデルと関数値確率変数列の大数の強法則

研究課題名（英文）Stochastic ranking process and function valued complete uniform law of large numbers

研究代表者

服部 哲弥（HATTORI, Tetsuya）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：10180902

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：過去の科研費研究で行った確率順位付けモデルの極限定理の学術論文を完成し、基礎となる大数の完全法則の学術論文とともに出版に至った。また以上に関連する専門的教科書ならびにその基礎となる測度論の演習書も執筆し出版した。ここで、確率順位付けモデルの極限定理とは、ウェブで見られるランキングの時間発展のモデルとなる確率順位付けモデルの位置強度結合経験分布の大数の法則（流体力学極限）と軌道についてのカオスの伝搬の証明を、強度（先頭に跳ぶ確率を与える点過程を定める関数）が位置依存性を持つ場合に一般化した著者による定理を指す。

研究成果の学術的意義や社会的意義

急速な発達によって時代を特徴付けるに至った計算機とネットワーク環境によって、インターネット小売業のような大規模なアイテムの人気度の全順位がリアルタイムで更新される現象が可視化されオンライン中古市場のように経済的な意味を持つ時代に、実際のデータと現象から論理的中核の抽出に成功していたが、その中核たる数学的内容を将来にわたって検討および勉強できるように、学術論文、専門的教科書、基礎演習書を刊行することができた。

研究成果の概要（英文）：We completed and published a paper on existence of hydrodynamic limits and propagation of chaos of the stochastic ranking processes, generalized to the cases of spatially dependent intensities for the point processes which determine the move-to-front (jump-to-top) random times. We also published (1) a paper on a complete law of large numbers which gives a basic framework of the main theorem, (2) a professional textbook which contains an introduction to the less popular complete law of large numbers, together with open problems, and (3) a basic textbook on measure theory, intended partially as a guidance towards the main mathematical interest of the research results.

As explained in the report of the previous KAKENHI project by the author, the stochastic ranking processes are the particle systems which model the rankings on the web, such as sales ranks of online bookstores, and the models give mathematical basis for the analysis of so called long-tail structure of online retails.

研究分野：数物系科学

キーワード：確率論 数理科学 確率過程論 大数の法則 流体力学極限 数理統計学 確率順位付けモデル

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究の研究代表者による以前の科研費基盤研究(C)「くりこみ群に基づく確率解析の基盤研究」(2009~2013年度:21340020)において、数学の外にある現象や科学的知見の中から既存の数理モデルとは異なる数学的広がりを持つクラスを発見しその数学的性質を研究するという方法論の具体例として、確率順位付け模型の研究を本格的に開始した。この模型の原型は、1列に並ぶ粒子が先頭に跳ぶ規則と呼ばれる特徴的な規則に従い、先頭に跳ぶ時刻をポワソン過程に基づく確率法則で与えるという単純な1次元粒子系(多成分確率過程)である。先頭に跳ぶ規則は20世紀半ばに既に知られていたが、21世紀になって初めて大規模な順位付けの時間変化が即時的に可視化されるようになった。すなわち、20世紀と21世紀の境目頃から、インターネットと個人所有のネット対応機器が社会に急速に浸透したことを背景として、オンライン小売業が急拡大した際に、そのウェブページに商品の売り上げ順位をリアルタイムで表示するという宣伝が広く行われるようになった。このような大規模な順位の時間発展を記述することが社会的な意味を持つようになったのが今世紀の特徴であることから、確率順位付け模型の無限粒子極限(流体力学極限)の研究が各粒子の軌道の追跡(カオスの伝搬)を含めて応用面から新しい意義を持つこととなった。

(2) 確率順位付け模型について、前年度までの科研費基盤研究(C)「確率順位付け模型とウェブランキングへの応用」(2014~2018年度:26400146)において、強度の経験分布が非有界な連続分布に弱収束位相で収束する場合について、位置に依存する強度を持つ確率順位付け模型の流体力学極限、すなわち、位置強度結合経験分布の収束とカオスの伝搬を証明した。この一般化は、極限を記述する点過程の強度が直前の到着時刻に依存して非独立増分であるという研究成果などで指摘してきたとおり、古くから実質上知られていた強度が位置依存性を持たない場合の簡単な拡張では無く、きわめて非自明な摂動問題である。確率順位付け模型はネット書店の売上順位の時間変化のモデルであり、ロングテール構造の数理解析の基礎模型となるという応用上の観点からは、強度の位置依存性は好順位の注目効果を意味する。また非有界な強度の経験分布は、商品の人気不人気のような格差の経済問題においてモデル分布として用いられることの多いパレート分布などが例となる。このように、この非自明な一般化は理論上の非自明さという興味だけで無く、応用上も重要な論点となる。

(3) 前年度までの研究期間では上記定理を含む主要な結果が学術誌に未掲載であり、まずは以上の結果の学術誌への出版が課題として残った。一連の研究は、よく言えば世界的に類似の進展を目指す研究のない、他の追従を許さない独創的研究と自負する。逆に言えば、基礎研究に対する余裕が小さい時代には、選択や集中から漏れる対象かもしれない。そのような研究を余裕のある時代が来るまで残るように内容の公開の手段を増やして後世に残すことも時代に巡り合わせた研究者の役割であると考える。論文を採択してくれる学術誌が見つかりにくいことがこのような研究の障害となる。

2. 研究の目的

本研究は、確率順位付け模型と呼ぶ粒子系の流体力学的極限についての研究者自身のこれまでの研究成果を土台として、その数学的な広がりや基礎付けのより良い理解を含めてあらゆる方向への発展可能性の研究を目的とする。さらに、この課題に至った研究者の研究姿勢に基づいて、特定の模型や問題にこだわらず、広く他分野や現実の現象の数学的性質を見出すことを目的とする。特に以前の科研費研究の継続となる位置依存性を持つ確率順位付け模型の流体力学極限については、原著論文と日本数学会の機関誌への総説の採択・出版と関連する基礎事項についての教科書の執筆などを目指して、主結果の基礎となる数学的内容を整理してできるだけ単純な要素の組合せに還元することで、当該研究課題への問題意識がある専門家に限らず、幅広い興味を得ることで当該研究成果を社会に財産として残すことを目指す。

3. 研究の方法

当該研究課題の内容を社会に財産として残すことが目的なので、その数学的な基礎的原理をできるだけ汎用性がある初等的な形で抽出して出版物として形に残すことが重要である。学術誌への出版については前年度までの科研費研究でも報告したとおり内容を次の3つにわけて出版する計画としていた:

(1) 極限粒子の時間発展を記述するのは強度が直前の到着時刻に依存する点過程と名付けた、ポワソン過程の非自明な一般化で独立増分性を持たない確率過程である。その分布は級数でのみ書かれる複雑だがあらわな公式を持ち、樋に海水を流す塩田の流れの方程式というべき、位置依存性を持つ蒸発率を持つ混合液体の蒸発だけで生じる1次元流が従う非同所項(積分項)を持つ偏微分方程式で特徴付けられる。非独立増分だが良い性質を持ちうるポワソン過程の一般化として将来役割を持つことを期待して主定理とは別の論文とする。

(2) 流れに従う確率順位付け模型についての独立確率過程の大数の強法則は、関数値独立確率変数列の2重に一樣な大数の完全法則と名付けた強い収束定理の形に一般化して解決した。バナッハ空間値独立確率変数の大数の強法則などの研究につながる可能性を期待して独立した論文とする。

(3) 流れが定める強度に従う確率順位付けモデルで元のモデルと同じ極限となる流れは、パラメータの流れから得られるこのモデルの時間発展が定める流れを対応させることを、流れの集合上の写像とみると、縮小写像であることが証明できて、その不動点として唯一決まる流れが求める主定理の極限である。

狭い研究課題に興味を持つ専門家だけでなく、広く社会に成果を還元すべく著すべき教科書としては、上記のうち2番目の大数の完全法則を中心として、確率論の初等的なところから未解決問題までの論理的な筋を通した独自性のある専門的教科書を計画する。さらに現代確率論が数学的には測度論の上に立脚していることから、測度論の基礎演習書の出版も社会に本研究計画への関心を広めるための重要で効果の大きい手段となる。

4. 研究成果

(1) 前年度までの科研費研究期間中に出版されていた非独立増分な確率過程の論文に加えて、主要結果を構成する残り2本の論文も完成度を高めてそれぞれ学術誌に掲載された。

(2) 日本数学会の総説記事を掲載する学術誌「数学」に「確率的順位付けの数理モデル」を寄稿する機会を得た。主結果を数式も用いて専門的に正確な解説を数学的な歴史的な経緯などとともに解説した論説記事である。

(3) 日本数学会に分野横断的に広く数学者の間に重要な成果の基礎的な内容を中心に発表する機会である企画特別講演がある。「Amazon ランキングと確率順位付けモデルの流体力学極限」を企画特別講演した。以上によって専門的な研究成果の公開は成功裏に区切りを付けることができた。

(4) 専門的教科書については、単行本「確率変数の収束と大数の完全法則」を刊行した。目的と方法の項目においても言及したが、研究成果の根幹をなす数学的要素に大数の法則と呼ばれるきわめて普遍的な確率論の極限定理の枠組みがある。本研究成果では標準的に言及されることが多い大数の強法則よりも強い結果である大数の完全法則と呼ばれる定理が本質的に用いられる。大数の完全法則は、数学的な専門家的理由によると推察されるが、大数の法則と呼ばれる一連の定理の中でこれまで比較的専門的の関心が薄かったように見える。著書「確率変数の収束と大数の完全法則」は、この大数の完全法則と呼ばれる定理を一つの目玉とした確率論の専門的教科書である。物理学の大きな分野である統計力学と熱力学の関係は数学的には大数の法則と見ることできるが、多くの現実的な物理的状況ではそこで成り立っている大数の法則とは実は大数の完全法則である。すなわち、数学的な専門的関心とは別に、現実への応用という観点からは大数の完全法則の数学的特徴を調べることは現状よりも重視されて良いはずである。さらに同書では、主結果の枠を越えて、大数の完全法則が一般の線形空間値で成り立つかという問題について、非可分空間の場合に既存の証明方法は本質的な困難があることを指摘するという進捗を得た。これはやや専門的ではあるが、将来の新たな研究課題の可能性を意味する。

(5) 確率論によって立つ測度論と呼ばれる分野の基礎的演習書として、単行本「難問克服 ルベグ積分」を刊行した。本研究の数学上の基盤である確率論および測度論の基礎的な教科書として本研究を社会に定着させるための土台とすることが基本の目標であるが、同書の中に、測度論を一般化した非加法的測度の特別な場合である劣モジュラー集合関数と凸ゲームに関する知見を根底から整理して書き込むことに成功した。本研究課題は数学的に精密な結果が実際の社会現象として観測されるという特徴があることは以前の科研費研究課題から強調してきたが、逆に言えばそのような数学的普遍性からの個別のズレが個別の社会現象の興味となる。そのデータからの抽出は精密な解析を必要とするが、データ解析を確率測度すなわち分布に対するデータに基づく非加法的測度として表現することと見ると、非加法的測度についての数学的結果の蓄積がデータ解析に決定的に重要と考えられる。これは本研究課題の成果を生かした次の研究課題への手がかりとなる。

非加法的測度は応用側からは数理経済学のゲームの理論や数理ファイナンスや数理統計学を含むもので、これらの諸分野から題材を集めつつ、数学的な極限定理の形に整理統合して確率論の研究の広がりの進展を目指すことは、特定のモデルや問題にこだわらず、広く他分野や現実の現象の数学的特徴を抽象して、数学的性質を見いだす研究理念に整合する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 服部哲弥	4. 巻 72-3
2. 論文標題 確率的順位付けの数理モデル	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 岩波「数学」	6. 最初と最後の頁 264-284
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetsuya Hattori	4. 巻 71(3)
2. 論文標題 Cancellation of fluctuation in stochastic ranking process with space-time dependent intensities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 359-396
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 服部哲弥	4. 巻 -
2. 論文標題 Amazonランキングと確率順位付けモデルの流体力学極限	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 2019年日本数学会秋季総合分科会企画特別講演アブストラクト	6. 最初と最後の頁 17-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetsuya Hattori	4. 巻 25
2. 論文標題 Doubly uniform complete law of large numbers for independent point processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Sciences the University of Tokyo	6. 最初と最後の頁 171-192
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 服部 哲弥
2. 発表標題 Amazonランキングと確率順位付けモデルの流体力学極限
3. 学会等名 2019年日本数学会秋季総合分科会企画特別講演（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetsuya Hattori
2. 発表標題 Hydrodynamic limit of stochastic ranking process
3. 学会等名 Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 服部 哲弥	4. 発行年 2020年
2. 出版社 東京図書	5. 総ページ数 264
3. 書名 難問克服 ルベーク積分	

1. 著者名 服部 哲弥	4. 発行年 2019年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 192
3. 書名 確率変数の収束と大数の完全法則	

〔産業財産権〕

〔その他〕

服部哲弥 日本語ホーム
<https://tetshattori.web.fc2.com/hattori.htm>

Tetsuya Hattori's: Research
<https://tetshattori.web.fc2.com/research.htm>

難問克服 ルベーク積分
<https://tetshattori.web.fc2.com/lebesgue.htm>

確率変数の収束と大数の完全法則
<https://tetshattori.web.fc2.com/LLN.htm>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------