

令和 4 年 4 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03352

研究課題名(和文) 調和写像理論の伸展

研究課題名(英文) Development of Theory of Harmonic Maps

研究代表者

浦川 肇 (Urakawa, Hajime)

東北大学・情報科学研究科・名誉教授

研究者番号：50022679

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間内に調和写像の研究の深化について二重調和写像の研究を中心に行なった。即ち(1)二重調和部分多様体の研究、(2)二重調和捻れ積の研究、(3)二重調和G主束の研究、(4)擬リーマン多様体上の二重調和ベクトル場の研究、(5)二重調和を一般化した多重調和写像の研究、(6)横断的二重写像の研究、(7)非正リッチ曲率リーマン多様体上の主束からの二重調和写像の研究、(8)二重調和リーマン沈め込みの研究、(9)コンパクトケーラー多様体上の二重調和エルミート・ベクトル束の研究、(10)コンパクト等質正曲率空間上の調和射影の研究、(11)コンパクト・リー群からの二重調和ファイバー束の研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

二重調和写像の研究は、極小部分多様体や調和写像の研究の自然な一般化であり、多くの微分幾何学者らの関心を引き、1980年代から、日本、アメリカ、イギリス、フランス、イタリア、ルーマニア、ロシア、中国、ブラジルなどの研究者らによって推進されてきた。二重調和写像の研究の成果は、微分幾何学への応用があると期待され極めて重要である。この研究は我が国においても、当該研究者を中心に多くの研究者らによって活発に推進されている。

研究成果の概要(英文)：During the period of our research on the biharmonic maps, we have proceeded the following studies: (1) the biharmonic sub manifolds, (2) the biharmonic warped products, (3) the biharmonic principal G-bundles, (4) the biharmonic vector fields on pseudo Riemannian manifolds, (5) the poly-harmonic maps (including biharmonic) mappings, (6) the transversally biharmonic mappings, (7) the biharmonic projections of the principal bundles over the Riemannian manifolds of nonpositive Ricci curvature, (8) the biharmonic Riemannian submersions, (9) the biharmonic double fibrations of compact Lie groups, (10) the harmonic morphisms of compact homogeneous spaces of positive curvature, (11) the biharmonic mappings for double vibrations of compact Lie groups.

研究分野：微分幾何学および大域解析学

キーワード：調和写像 極小部分多様体 二重調和写像 リーマン多様体 リーマン・ベクトル束 沈め込み 二重調和ベクトル場 捻れ積

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

微分幾何学の研究において重要な調和写像の研究において、二重調和写像の研究は極めて重要であり、定義から調和写像ならば二重調和であることは明白であるが、逆は必ずしも成り立たない。実際、様々な反例があった。また、この問題に対してチェン予想「ユークリッド空間内の二重調和部分多様体は調和であろう」という未解決問題がある。さらに(1)二重調和写像を分類すること、(2)どのような場合に調和写像でない二重調和写像があるのか、の問題は重要である。これまで二重調和写像の研究は、アメリカ、カナダ、ブラジル、イギリス、フランス、イタリア、ドイツ、ルーマニア、中国、韓国、日本など、様々な国の研究者らによって研究されている。一方において、我々は既に、二重調和写像の研究において「非正曲率多様体への二重調和等長はめ込みが自乗可積分ならば調和である」という二重調和写像研究の重要な端緒を与える成果を上げている。その成果を踏まえて様々な研究交流が行われ、様々な研究が行われている。以上を踏まえ、調和写像と二重調和写像の両者の新たな関係を見出し、明らかにして行きたい。

### 2. 研究の目的

我々は「どのような場合に二重調和写像は調和となるか」、「調和でない二重調和写像を分類せよ」、「等質な場合の二重調和写像の分類」、さらに「一般的な多重調和写像の研究」など、研究当初、二重調和写像と調和写像との関係は、必ずしも明らかではなかった。そこで我々は、具体的な状況設定のもと、「二重調和写像と調和写像との関係」を明らかにしてゆき、さらに分類を行うことを目的とする。

### 3. 研究の方法

具体的な様々な状況設定の下に、調和写像と二重調和写像との関連を調べる。すなわち、対称空間内の部分多様体、捻れ積の場合、G主束の場合、ベクトル束の場合、横断的な葉層空間の場合、擬リーマン多様体上のベクトル場の場合、リーマン沈め込みの場合など、具体的な状況を設定し、調和となるものと二重調和となるもの、あるいは多重調和となるものを調べる。

### 4. 研究成果

我々の研究の研究成果は次の通りである：

(1)コンパクト・リー群Gの二つの部分群KとHからできるファイバー束 (K)と (H) について、(K)の底空間内のH不変なすべての二重調和超曲面は、(H)内でK不変な二重調和となる超曲面を生成し、逆に、(H)の底空間内のK不変なすべての二重調和超曲面は(K)内でH不変な二重調和となる超曲面を生成することを示した。結果は、次の論文：

Hajime Urakawa, Harmonic maps and biharmonic maps for double fibrations of compact Lie groups, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 51 (2022), 550-573 で発表受理された。

(2)コンパクト・等質な正曲率空間は階数1の対称空間以外にも7次元と13次元の等質空間で対称空間ではないものがあることを1961年にM.ベルジェが示した。1972年にN.R.ワラックは6次元、12次元と24次元の等質空間にも同様のものがあり、更に任意のコンパクト等質空間で条件(III)があれば正曲率となることを示した。1975年にS.アロフとN.R.ワラックは条件(III)より弱い条件(II)であっても正曲率となることを示した。条件(II)を満たすコンパクト等質空間の分類は全くなされていない状況である。我々は「階数1の対称空間上への条件(II)を満たす等質空間からの射影は、必ず調和写像でなければならない」という定理を得た。この定理は「階数1の対称空間上の等質空間が正曲率空間となるには必ず制約がある」ことを示した興味深い結果であり、今後の等質正曲率空間の研究に、重要な一石を投じた研究であると言えよう。結果は論文：Hajime Urakawa, Harmonic morphisms of compact homogeneous spaces of positive curvature, Note di Matematica, Vol. 41 (2021), 1-18 で発表された。

(3)コンパクト・ケーラー多様体またはコンパクト・アインシュタイン多様体上のエルミートベクトル束の射影について、その射影が二重調和であるならば調和であることを示した。結果は論文：Hajime Urakawa, Biharmonic Hermitian vector bundles over compact Kaehler manifolds and compact Einstein Riemannian manifolds, Note di Matematica, Vol. 39 (2019), 95-109 で発表された。

(4)コンパクトなリーマン多様体上のG主束について、その射影は二重調和であるなら、必ず調和とならねばならないことを、底空間のリッチ曲率が負定値の場合に成り立つことを示した。非コンパクトなG主束の場合にも有限なエネルギーと有限な2-エネルギーの下に、同様の結果を示した。結果は論文：Hajime Urakawa, Biharmonic maps on principal G-bundles over complete Riemannian manifolds of nonpositive Ricci curvature, Michigan Mathematical Journal, Vol 68 (2019), 19-31 で発表された。

(5)コンパクト・リー群内のすべての二重調和等質部分多様体を分類した。更に、コンパクト・

対称空間内のすべての二重調和等質部分多様体を分類した。応用として調和ではない二重調和となるコンパクト・リー群内に調和ではない二重調和となる等質部分多様体を構成することができた。結果は論文:Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups, Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 49 (2019), 47-115 において発表された。

(6)リーマン沈めこみに関して、その射影のテンション場と二重テンション場を決定した。その応用としてコンパクト・エルミート対称空間上のサークル主束の射影が二重調和写像であるが、調和写像とならない条件を完全に特徴付けた。その結果、複素射影空間上の無限個のサークル主束でその射影が二重調和写像であるが調和写像とならないものを構成することができた。それらの結果は論文:Hajime Urakawa, Harmonic maps and biharmonic Riemannian submersions, Note di Matematica, Vol. 39 (2019), 1-23 において発表された。

(7)二つのリーマン多様体  $M$  と  $F$  との直積空間を作り、 $M$  上の滑らかな関数  $f$  を用いて、直積計量を捻って「捻りリーマン多様体」を与えることができる。この時捻りリーマン多様体のテンション場が関数  $f$  の勾配ベクトルとなること、及び二重テンション場が  $M$  のリッチテンソル場を用いて決定されることを示した。この応用として、捻りリーマン多様体から  $M$  上への射影が二重調和となるための必要十分条件が「関数  $f$  の3回微分を用いた非線型微分方程式」により与えられることを示した。この非線型微分方程式を解いて射影が二重調和となるが調和とならないものを関数  $f$  を用いて構成・分類することができた。その結果は論文:Hajime Urakawa, Harmonic maps and biharmonic maps on principal bundles and warped product, Journal of Korean Mathematical Society, Vol. 55 (2018), 553-574 において発表された。

(8)「 $n$ 次元ユークリッド空間内の二重調和超曲面について、すべての主曲率が単純であり、テンション場が一定値となる部分多様体に沿った枠が既約であるならば、実は調和となる」という定理を得た。これは未解決問題であるチョン予想の部分的な解決を与える重要な結果である。結果は論文:Norihito Koiso and Hajime Urakawa, Osaka Journal of Mathematics, Vol. 55 (2018), 325-346 において発表された。

(9)葉層構造を持ったリーマン葉層多様体について、横断的なエネルギーと横断的な2-エネルギーが共に有限ならば、横断的な二重調和写像は必ず横断的な調和写像となることを示した。結果は論文:Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Rigidity of transversally biharmonic maps between foliated Riemannian manifolds, Hokkaido Mathematical Journal, Vol 47 (2018), 637-654 において発表された。

(10)完備リーマン多様体からユークリッド空間への  $k$ 重調和写像に対して、すべての  $j=1,2,\dots,2k-2$  に対する  $j$ -エネルギーが有限ならば、調和写像となることを示した。結果は論文:Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Polyharmonic maps into the Euclidean space, Note di Matematica, Vol. 38 (2018), 89-100 において発表された。

(11)擬リーマン多様体のベクトル場のエネルギーと2-エネルギー関し、左不変なローレンツ計量を持つ3次元リー群の左不変な調和ベクトル場と二重調和ベクトル場を決定した。共著者は、当時ギリシャ・パトラ(Patra)大学の大学院生、現在ギリシャ・キプロス(Cyprus)大学の国際教育学部数学科講師である。結果は論文:Michael Markellos and Hajime Urakawa, Biharmonic vector fields on pseudo-Riemannian manifolds, Journal of Geometry and Physics, Vol. 130 (2018), 553-574 において発表された。

(12)二重調和写像の総合報告、すなわち、二重調和部分多様体上の平均曲率関数が自乗可積分であれば極小部分多様体となること、コンパクト・リー群や対称空間への調和写像や二重調和写像の分類定理、二重調和写像全体の空間のパブリック現象、リーマン多様体内の二重調和部分多様体の特徴づけと分類定理、佐々木多様体内の二重調和部分多様体の特徴付け、ケーラー多様体内の二重調和ラグランジュ部分多様体の特徴付けと分類定理、2つの葉層多様体間の横断的な二重調和写像の特徴付けと分類定理、二つのコーシー・リーマン多様体間の擬調和写像と擬調和と二重調和写像の特徴付けと分類定理、二つの  $G$  主束や捻れ束の間の調和写像や二重調和写像の特徴づけと分類定理など、著者が得た諸定理と諸結果をまとめ、ワールド・サイエンティフィック出版社において、338頁の英文著書:Hajime Urakawa, Geometry of biharmonic mappings. Differential geometry of variational methods, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Hackensack, NJ, 2019, x+338 pp. ISBN: 978-981-3236-39-4 として、出版された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hajime Urakawa	4. 巻 51
2. 論文標題 Harmonic maps and biharmonic maps for double vibrations of compact Lie groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 551--574
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hajime Urakawa	4. 巻 41
2. 論文標題 Harmonic morphisms of compact homogeneous spaces of positive curvature	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Note di Matematica	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Urakawa, Hajime	4. 巻 68
2. 論文標題 Biharmonic maps on principal G-bundles over complete Riemannian manifolds of nonpositive Ricci curvature	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 47-115
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohno, Shinji, Sakai, Takashi and Urakawa, Hajime	4. 巻 49
2. 論文標題 Biharmonic homogeneous submanifolds in comopact symmetric spaces and compact Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 47-115
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Urakawa, Hajime	4. 巻 39
2. 論文標題 Harmonic maps and biharmonic Riemannian submersions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Note di Mathematica	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Urakawa, Hajime	4. 巻 40
2. 論文標題 Biharmonic Hermitian vector bundles over compact Kaehler manifolds and compact Einstein Riemannian manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Note di Matematica	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa	4. 巻 47
2. 論文標題 Rigidity of transversally biharmonic maps between foliated Riemannian manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 637--654
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa	4. 巻 38
2. 論文標題 Polyharmonic maps into the Euclidean space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Note di Matematica	6. 最初と最後の頁 89--100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Michael Markellos and Hajime Urakawa	4. 巻 130
2. 論文標題 Biharmonic vector fields on pseudo-Riemannian manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 293--314
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hajime Urakawa	4. 巻 55
2. 論文標題 Harmonic maps and biharmonic maps on principal bundles and warped products	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 553--574
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norihiro Koiso and Hajime Urakawa	4. 巻 55
2. 論文標題 Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 325--346
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa	4. 巻 49
2. 論文標題 Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 47--115
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Hajime Urakawa
2. 発表標題 Harmonic maps and biharmonic maps between Riemannian manifolds
3. 学会等名 The 2022 the First International Conference on Applied Mathematics and Digital Simulation (AMDS 2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hajime Urakawa
2. 発表標題 Geometry of harmonic maps and biharmonic maps
3. 学会等名 International conference of differential geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hajime Urakawa
2. 発表標題 Biharmonic principal G-bundles and vector bundles
3. 学会等名 Differential Equations over Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hajime Urakawa
2. 発表標題 Harmonic and biharmonic Riemannian submersions
3. 学会等名 Differential Geometry Workshop 2018--Harmonic maps, biharmonic maps, harmonic morphisms and related topics-- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦川肇
2. 発表標題 Biharmonic Riemannian submersions の幾何
3. 学会等名 研究会「多様体上の微分方程式」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦川肇
2. 発表標題 On biharmonic Riemannian submersions
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦川肇
2. 発表標題 Biharmonic maps and harmonic morphisms from Riemannian manifolds of positive sectional curvature
3. 学会等名 北海道大学研究集会「幾何学のスペクトル Spectrum of Geometry」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦川肇
2. 発表標題 調和写像と2調和写像の幾何学
3. 学会等名 第18回秋葉原微分幾何学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 Urakawa, Hajime	4. 発行年 2019年
2. 出版社 World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.	5. 総ページ数 348
3. 書名 Geometry of biharmonic mappings, Differential geometry of variational methods	

1. 著者名 藤原松三郎、浦川肇、高木泉、藤原毅夫	4. 発行年 2020年
2. 出版社 内田老鶴園	5. 総ページ数 693
3. 書名 代数学 第2巻	

1. 著者名 Hajime Urakawa	4. 発行年 2019年
2. 出版社 World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd.	5. 総ページ数 348
3. 書名 Geometry of Biharmonic Mappings--Differential Geometry of Variational Methods--	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------