様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月１１日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：１８Ｋ０３３５４

研究課題名（和文）拡散誘導不安定化と非拡散過程が織り成す反応拡散系のダイナミクス探究

研究課題名（英文）Dynamics of reaction-diffusion-ODE system

研究代表者
鈴木　香奈子（Suzuki, Kanako）

茨城大学・理工学研究科（理学野）・准教授

研究者番号：１０４５１５１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究では，複数の常微分方程式と1本の反応拡散方程式から成る一般の拡散－非拡散系を有界領域上で考察し、主に次の結果を得た．（1）定数定常解周りで存在する少なくとも連続な定常解はすべて不安定であることを示した．（2）常微分方程式系を満たす解がジャンプをもつ不連続な定常解の存在を構成法的に示し，かつそれが安定になる十分条件を明らかにした．これにより，拡散－非拡散系のダイナミクスは特異的なものに限られることが分かり，古典的な反応拡散系のダイナミクスとの違いが一層明確になった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
拡散－非拡散系はパターン形成の数理モデルとしても多く用いられているが，個々のモデルに対して数値実験などが行われ，ダイナミクスに関する体系的な研究はほとんどなされていなかった．本研究により，拡散－非拡散系のダイナミクスは，古典的な反応拡散系のそれとはまったく異なることが明らかとなった．特に，拡散－非拡散系の初期値問題の解の挙動は特異的なものに限られるため，本研究結果は数値実験結果を正しく理解するために重要な役割を果たす．これはモデルの再考や現象の理解につながる大変意義のある結果であると考えられる．

研究成果の概要（英文）：We study a general reaction-diffusion-ODE system, which consists of several ordinary differential equations coupled with a reaction-diffusion equation, in a bounded domain and with Neuman boundary condition. There are a lot of mathematical models in the form of a reaction-diffusion-ODE system, for example, models of pattern formation, and models of ecological dynamics.
It has been proved that all near-equilibrium (regular) patterns of a general reaction-diffusion-ODE system are unstable, regardless of the particular structure assumption on nonlinearities. This observation suggests that stable stationary solutions arising in models with non-diffusive components must be far-from-equilibrium exhibiting singularities. We have presented the existence of stationary solutions with jump-discontinuities and have provided sufficient conditions for their stability.

研究分野：非線形解析学

キーワード：反応拡散系

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

今日，生物学的に自然な仮定に基づいたパターン形成の数理モデル構築の必要性が高まっており，実際の現象に基づいた数理モデルは，非拡散物質と拡散物質が混在する系が多くみられる．例えば，肺胞上皮がん初期に見られる巨視的な空間パターン形成は，組織内を拡散する化学物質が細胞膜に存在する受容器に結合し，それにより細胞の増殖が促進される過程を記述した反応拡散系で説明される．また，脳腫瘍（神経膠腫）が浸潤する過程は，局所的な細胞密度に依存して浸潤の ON/OFF が切り替わることを記述した反応拡散系で説明される．これら実際の観察に基づく数理モデルでは，細胞密度の空間非一様性を誘導するメカニズムとして，古典的な反応拡散系でよく用いられるアイディアである「拡散誘導不安定化」が用いられているが，その生物学的な裏付けは乏しい．これらの数理モデルは個別に研究対象となっており，数値実験によって解の振る舞いは調べられているものの，理論面からの研究はまだ少ない．

2014 年度から 2017 年度に取り組んだ基盤研究(C)の研究課題では，非拡散物質と拡散物質から成る系の最も単純な場合である 1 本の反応拡散方程式と 1 本の常微分方程式から成る 2 連立系を考察した。そこで，拡散誘導不安定化が非定数定常解をも不安定化させること，拡散誘導爆発が起こりうることなどを示し，古典的な反応拡散系のダイナミクスと大きく異なることを明らかにした。

２．研究の目的

複数本の常微分方程式と 1 本の反応拡散系から成る一般の連立系について，非拡散過程と系のダイナミクスとの関連を明らかにする．特に，安定になり得る有界な定常解は不連続なものに限られることが予想されるため，その存在条件と安定条件を明らかにし，一般の拡散－非拡散系のダイナミクスの理解へとつなげる．

現在は，ある現象に対して提唱された数理モデルは，それぞれ個別に研究対象となっている．異なる現象を記述した全く異なる方程式系でも，数値実験結果は同じようになることが多いが，その理由を方程式から理解する体系的な研究はまだない．どの項が本質的な役割を果たしているのかを把握できるような体系的な理解を目的とする．

３．研究の方法

拡散物質と非拡散物質から成る一般の系を考える：

$$\text{(E1)}\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, v), & x \in \overline{\Omega},\ t > 0, \\ v_t = D\Delta v + g(\boldsymbol{u}, v), & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

ここで Ω は N 次元ユークリッド空間の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域で，未知関数 $\boldsymbol{u}$ と v はそれぞれ

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t)), \qquad v = v(x,t)$$

である。v は Neumann 境界条件を満たす：

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0.$$

ここで $\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルである．非線形項は C^2 級の関数で

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, v) = (f_1(\boldsymbol{u}, v), \cdots, f_N(\boldsymbol{u}, v)), \qquad g = g(\boldsymbol{u}, v)$$

と与えられる。

定常解の安定性については，2 連立の場合の結果を拡張するため，$\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列がどのように影響するかという視点で考察する．不連続な定常解については，汎用性の高い不動点定理を用

いて構成法的に存在を示す。さらに，安定性の十分条件を非線形項への仮定から導く．

４．研究成果

$(\boldsymbol{U}(x), V(x))$ を（E1）の定常解とする．（E1）の定常解であるとは，

（E2） $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}(x), V(x)) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}$$

かつ境界値問題

（E3） $$D\Delta V + g(\boldsymbol{U}(x), V(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

を満たす $(\boldsymbol{U}(x), V(x))$ のことである．さらに，$(\boldsymbol{U}(x), V(x))$ がレギュラーな定常解であるとは，$\boldsymbol{U}, V \in L^\infty(\Omega)$ かつ $\boldsymbol{U}$ が（E2）を解いて $\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{k}(V(x))$ と V の関数として与えられるときをいう．ここで $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_N)$ は C^2 級関数である．このとき（E3）は単独の Neumann 境界値問題に帰着される：

$$D\Delta V + h(V) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

ただし $h(V) = g(\boldsymbol{k}(V), V)$ で定義される．一方，$(\boldsymbol{U}(x), V(x))$ が不連続な定常解であるとは，$\boldsymbol{U}$ が（E2）の相異なる枝を使って得られる解のことをいう．

（1） レギュラーな定常解はすべて不安定であること

$\boldsymbol{f}$ のヤコビアンは

$$\boldsymbol{f_U} = \boldsymbol{f_U}(\boldsymbol{U}(\cdot), V(\cdot)) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1(\boldsymbol{U}, V) & \cdots & \partial_{u_N} f_1(\boldsymbol{U}, V) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} f_N(\boldsymbol{U}, V) & \cdots & \partial_{u_N} f_N(\boldsymbol{U}, V) \end{pmatrix}$$

で定義される．ここで $\partial_{u_j} = \partial/\partial u_j$ を表す．これに対して

$$s(\boldsymbol{f_U}) = \sup\{\mathrm{Re}(\lambda(x)) \mid \lambda(x) \text{ は } \boldsymbol{f_U} \text{ の } x \in \overline{\Omega} \text{ に対する固有値}\}$$

を定義する．このとき次の結果が得られた：

- $s(\boldsymbol{f_U}) > 0$ ならば，定常解 $(\boldsymbol{U}, V)$ は不安定である．
- $s(\boldsymbol{f_U}) \leq 0$ かつ $\det(\boldsymbol{f_U}(\boldsymbol{U}(x), V(x))) \neq 0$ ならば，定常解 $(\boldsymbol{U}, V)$ は不安定である．

最も単純な2連立の場合と同様に，一般の系でもレギュラーな定常解の不安定性には常微分方程式系の非線形項が重要な役割を果たしていることが明らかとなった．

（2） 不連続な定常解の存在と安定性

（E1）が定数定常解 $(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V})$ をもつと仮定すると，$(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V})$ は $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) = 0$ かつ $g(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) = 0$ を満たす．この点において

$$\det\left(\boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V})\right) \neq 0, \qquad \frac{1}{\det\left(\boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V})\right)} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) & \boldsymbol{f_V}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) \\ g_{\boldsymbol{U}}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) & g_V(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V}) \end{pmatrix} \neq D\mu_k$$

を仮定する．ここで μ_k は $-\Delta$ の固有値である．$\det\left(\boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{V})\right) \neq 0$ より陰関数定理が適用できて $\overline{V}$ の近傍 Σ で

$$\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{k}(\overline{V}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(x), V(x)) = 0 \quad x \in \Sigma$$

を満たす関数 $\boldsymbol{k} \in C^2(\Sigma)$ が存在する．さらに，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}, V) = 0$ が Σ 上 $\boldsymbol{U}$ について少なくとも2つの枝をもつと仮定する．つまり $\overline{V}$ の近傍 Σ で2つの関数 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k_2}$ が存在して

$$\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{k_1}(\overline{V}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}_1(x), V(x)) = 0 \quad x \in \Sigma,$$
$$\boldsymbol{k_2}(\overline{V}) \neq \boldsymbol{k_1}(\overline{V}) \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}_1(x), V(x)) = 0 \quad x \in \Sigma$$

を満たす．これらの仮定は例えばFitzHugh-Nagumo型の非線形項をもつ拡散－非拡散系が満足する：

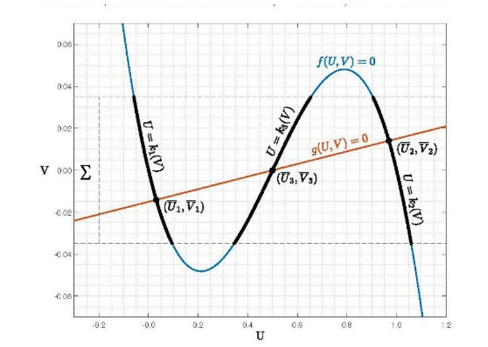
（E4） $$\begin{aligned} u_t &= u(1-u)(u-\beta) - v, \\ v_t &= D\Delta v + \sigma u - \delta v - \rho. \end{aligned}$$

ただし β,σ,δ,ρ は正定数で $\beta<1$ とする．右図は（E4）のヌルクラインの様子である．

このとき，$\Omega_1\subseteq\Omega$, $\Omega_2=\Omega-\Omega_1$ かつ Ω_2 の測度を小さくとれば

$$\boldsymbol{U}(x)=\begin{cases}\boldsymbol{k_1}(V(x)), & x\in\Omega_1,\\ \boldsymbol{k_2}(V(x)), & x\in\Omega_2\end{cases}$$

を満たす定常解が存在する．これより $\boldsymbol{U}$ は不連続であるが，ソボレフの埋め込み定理より V は連続となる．この定常解は $(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V})$ と $(\boldsymbol{k}_2(\overline{V}),\overline{V})$ の近くに存在する．



$f(U,V)=U(1-U)(U-\beta)-V=0$ and $g(U,V)=\sigma U-\delta V-\rho=0.$

次に安定性の条件を考察する．

$$s\left(\boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V})\right)<0,\qquad s\begin{pmatrix}\boldsymbol{f_U}(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V}) & \boldsymbol{f}_V(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V})\\ g_{\boldsymbol{U}}(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V}) & g_V(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V})\end{pmatrix}<0$$

を仮定する．また，V の拡散係数 D を十分大きくとる．このとき

- $s\left(\boldsymbol{f_U}(\boldsymbol{k}_2(\overline{V}),\overline{V})\right)<0$ ならば不連続定常解 $(\boldsymbol{U},V)$ は線形安定である．
- 線形安定の仮定に加えて $g_V(\overline{\boldsymbol{U}},\overline{V})<0$ かつ$g_V(\boldsymbol{k}_2(\overline{V}),\overline{V})<0$ならば，不連続定常解 $(\boldsymbol{U},V)$ は非線形の意味で安定である．

これらの条件は具体的に与えられた数理モデルにおいて確かめることが容易な場合が多い．不連続定常解の存在を構成的に示したことにより，初期値問題の初期値のとり方によって最終的に欲しい定常解の形状をデザインすることが可能である．

以上の結果は，拡散－非拡散系のダイナミクスは，古典的な反応拡散系のそれとはまったく異なることを示しており，数学的にはもちろん応用面からも重要である．拡散－非拡散系の初期値問題の解の挙動は特異的なものに限られるため，本研究結果は数値実験結果を正しく理解するために重要である。

この他、非拡散過程が非線形方程式系の解のダイナミクスに与える影響を考察するため，ランダムウォークの量子版として期待されている量子ウォークについても考察を行った．離散時間量子ウォークについて，時間発展が場所に依存する非線形性を持つモデルのソリトン解の存在とそのダイナミクスを数値実験と共に解析した。また，周期的に振る舞う解の存在及びソリトンの衝突などを考察した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　2件）

1．著者名 Szymon Cygan, Anna Marciniak-Czochra, Grzegorz Karch and Kanako Suzuki	4．巻 48
2．論文標題 Stable discontinuous stationary solutions to reaction-diffusion-ODE systems	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Communications in Partial Differential Equations	6．最初と最後の頁 478-510
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/03605302.2023.2190525	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Szymon Cygan, Anna Marciniak-Czochra, Grzegorz Karch, Kanako Suzuki	4．巻 337
2．論文標題 Instability of all regular stationary solutions to reaction-diffusion-ODE systems	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 460-482
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.08.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 M. MAEDA, H. SASAKI, E. SEGAWA, A. SUZUKI, K. SUZUKI	4．巻 74
2．論文標題 Dispersive estimates for quantum walks on 1D lattice	5．発行年 2022年
3．雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6．最初と最後の頁 217--246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/85218521	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Suzuki	4．巻 52
2．論文標題 Criterion toward understanding non-constant solutions to p-Laplace Neumann boundary value problem	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Mathematical Journal of Ibaraki University	6．最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5036/mjiu.52.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Maeda Masaya、Sasaki Hironobu、Segawa Etsuo、Suzuki Akito、Suzuki Kanako	4．巻 3
2．論文標題 Dynamics of solitons for nonlinear quantum walks	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Journal of Physics Communications	6．最初と最後の頁 075002～075002

掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1088/2399-6528/aafe2c	有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　6件／うち国際学会　6件）

1．発表者名
Kanako Suzuki
2．発表標題 Stability of stationary solutions to reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 Turing symposium on Morphogenesis, 2024（国際学会）
4．発表年 2024年

1．発表者名
Kanako Suzuki
2．発表標題 Stability and instability of stationary solutions to reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 Reaction-Diffusion Equations and Related Stochastic Topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名
Kanako Suzuki
2．発表標題 Instability and diffusion-driven blowup in some reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 RIMS, Kyoto University（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Kanako Suzuki
2．発表標題 Spatial patterns of some reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 Modeling Biological Phenomena by Parabolic PDEs and their Analysis（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 鈴木　香奈子
2．発表標題 Reaction-diffusion-ODE system の解のダイナミクス
3．学会等名 第115回神楽坂解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Kanako Suzuki
2．発表標題 Bounded and unbounded spatial patterns to some reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 AISM2018 "Emergence and Dynamics of Patterns in Nonlinear Partial Deferential Equations and Related Fields"（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Kanako Suzuki
2．発表標題 Stability and blowup of solutions to some reaction-diffusion-ODE systems
3．学会等名 Nonlinear Partial Differential Equations --Japan-China Project for Young Mathematicians 2018--（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Turing symposium on Morphogenesis, 2024	2024年～2024年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Heidelberg University			
ポーランド	University of Wroclaw			