

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03356

研究課題名（和文）変分的手法の発展と非線形偏微分方程式や凸幾何学への応用

研究課題名（英文）Development of variational methods and their applications to nonlinear partial differential equations and convex geometry

研究代表者

柴田 将敬 (Shibata, Masataka)

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：90359688

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：非線形楕円型方程式に関連する変分問題に関する研究を行った。主なものとして、ある準線形楕円型方程式で非線形の増大度が H^1 臨界の場合に漸近挙動を明らかにした。次に、大きな有界領域において半線形楕円型方程式の解が無数存在することを示した。また、メトリックグラフ上での半線形楕円型方程式の非自明解の構成や最小エネルギー解の漸近挙動を明らかにした。また、Mahler予想を一般化したvolume productの最小化問題を研究し、様々な対称性の下で、最小値や最小化元を明示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形楕円型方程式に関する変分的なアプローチの研究は盛んになされており、より優れた手法を開発し、応用範囲を広げることは学術的意義が高い。本研究では、極限にTalenti関数が現れる問題において精密なエネルギーの漸近評価をし、また、汎関数を変形することで非自明解を構成する新たな手法を開発した。もう一つ、Mahler予想は凸幾何学における長年注目されている未解決予想であり、近年ではシンプレクティック幾何学など他分野の予想との関連も指摘される重要な問題である。3次元でのMahler予想解決を元にし、より一般的な問題を設定・解決することは、Mahler予想に関する理解を深めることにつながっている。

研究成果の概要（英文）：We studied variational problems related to nonlinear elliptic equations. First, we clarified the asymptotic behavior of a quasi-linear elliptic equation with a H^1 -critical nonlinear term. Second, we showed that there exist infinitely many solutions of semi-linear elliptic equations in large bounded domains. Third, we studied the existence results of the semi-linear elliptic equations on metric graphs and the asymptotic behavior of the least energy solutions. We also studied the minimizing problems of volume products under various symmetries, which are generalizations of the Mahler conjecture. We explicitly obtained the minimum values and the minimizers under various symmetries.

研究分野：非線形楕円型方程式

キーワード：変分問題 Mahler予想 特異極限問題 非線形楕円型方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

半線形楕円型方程式は、非線形 Schrödinger 方程式の定在波や、時間発展する方程式の定常解が満たす方程式として導出され、半線形楕円型方程式の解構造を明らかにすることは、時間発展する方程式を調べる上でも重要な課題である。さらに、物理現象に由来する問題など、多くの場合に方程式は変分構造を持つ。変分構造を利用して半線形楕円型方程式の解の存在・非存在やパラメータに関する極限問題を考察することは、一つの大きな研究テーマであり、こういった研究を通じて変分的手法が発展してきた。解の存在を示す際には、解の近似列である Palais-Smale 列の H^1 有界性やコンパクト性を確かめることが必要であり、そこでは凝集コンパクト性を用いた議論などが有効である。しかしながら、既存の手法を直接適用できない問題はまだまだ多い。

もう一つ、Mahler 予想は、1939 年の論文で K. Mahler 氏によって提出された予想であり、凸幾何学分野の長年の未解決問題として有名である。これは n 次元空間において、中心対称な凸体の volume product (Mahler 体積) と呼ばれる量の最小化元は超立方体である、という予想である。 $n=2$ の場合は Mahler 自身によって肯定的に解決されているが、 $n=3$ では依然として未解決であった。入江博氏(茨城大学)との共同研究において、 $n=3$ の場合を解決した論文を投稿済みであったが、まだ未掲載の状態であった。

2. 研究の目的

半線形楕円型方程式に関する解の存在問題や特異極限問題に関する研究を通じて、個々の問題に関する知見を得、さらに、それぞれの手法に関するより深い理解や新規手法の開発を行うのが目的である。

また、Mahler 予想に関しては、3 次元対称凸体に関する Mahler 予想を解決した手法を整理・発展させ、Mahler 予想の完全解決へ近づくことを目指す。

3. 研究の方法

次の 5 つを主要なテーマとして共同研究を中心に研究を行った。

- (1) ある準線形楕円型方程式の正值解の特異極限問題(足達慎二氏(静岡大学)・渡辺達也氏(京都産業大学)との共同研究)
- (2) Kirchhoff 型楕円型方程式の正值解の存在問題(内免大輔氏(室蘭工業大学)との共同研究)
- (3) 有界領域上の半線形楕円型方程式の非自明解の構成(佐藤洋平氏(埼玉大学)との共同研究)
- (4) メトリックグラフ上の半線形楕円型問題(倉田和浩氏(東京都立大学)との共同研究)
- (5) Mahler 予想に関連する volume product 最小化問題(入江博氏(茨城大学)との共同研究)

4. 研究成果

研究の方法で述べた 5 つのテーマのそれぞれについて、研究成果を述べる。

- (1) ある準線形楕円型方程式の正值解の特異極限問題

これまでの両氏との共同研究において、プラズマ物理学に現れるある準線形楕円型方程式の正值解の一意性やパラメータ極限での正值解の漸近挙動について考察してきた。その中で、非線形項の増大度が H^1 優臨界の場合と H^1 劣臨界の場合の正值解の漸近挙動を解明したが、 H^1 臨界の場合の正值解の漸近挙動が未解明であった。この未解明な部分に取り組み、適当なスケーリングの下で正值解が Talenti 関数に漸近することを示した。また、スケーリングパラメータの漸近挙動も明らかにした。

- (2) Kirchhoff 型楕円型方程式の正值解の存在問題

H^1 臨界な非線形項を持つ Kirchhoff 型楕円型方程式の解の存在問題について取り組んだ。この問題は、Palais-Smale 列の極限が満たすべき極限方程式の解の一意性が失われているところに困難さがあるが、Fibering map 法を凝集コンパクト性の解析と組み合わせるといって従来あまり用いられていない方法を適用することで、複数の正值解の存在を示した。

- (3) 有界領域上の半線形楕円型方程式の非自明解の構成

半線形楕円型方程式で非線形項が Berestycki-Lions 条件を満たす場合には、非自明解の存在が期待され、全空間の問題でポテンシャルが定数や漸近的に定数の場合には非自明解が構成されている。一方、有界領域においては、Palais-Smale 列の H^1 有界性を示す部分に困難があり、非線形項に様々な付加的な条件を加えた場合の結果しかなかった。本研究では、汎関数を変形する新規手法を開発し、十分大きな有界領域では非自明解が構成出来ることを示した。

- (4) メトリックグラフ上の半線形楕円型問題

メトリックグラフ上で、半線形楕円型方程式の特異極限問題を研究した。まず、最小エネルギー解の漸近挙動について考察し、最小エネルギー解の集中現象や、集中する位置とグラフの形状の間の関係を明らかにした。また、最小エネルギー解に限らない正值解の構成を行った。そこでは、最小エネルギー解とは異なり、グラフの結節点に集中する正值解の存在も示した。

- (5) Mahler 予想に関連する volume product 最小化問題

Mahler 予想を一般化した問題を研究した。より具体的には、 $O(n)$ の有限部分群 G を指定し、 n 次元空間の G 対称な凸体の volume product を最小化する問題に取り組んだ。成果は主に二つで、一般の n に対し、超立方体を不変とする $SO(n)$ の部分群 G と n 単体を不変とする $SO(n)$ の部分群 G それぞれについて、 G 不変な n 次元凸体の volume product 最小化問題を解決した。もう一つは、 $O(3)$ のさまざまな有限部分群 G について、 G 不変な 3 次元凸体の volume product 最小化問題を解決した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Iriyeh Hiroshi, Shibata Masataka	4. 巻 68
2. 論文標題 Minimal Volume Product of Three Dimensional Convex Bodies with Various Discrete Symmetries	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 738 ~ 773
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-021-00357-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Adachi Shinji, Shibata Masataka, Watanabe Tatsuya	4. 巻 101
2. 論文標題 Uniqueness of asymptotic limit of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equation with H^1 -critical growth in \mathbb{R}^3	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 671 ~ 691
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2020.1757079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shibata Masataka	4. 巻 20
2. 論文標題 Multiplicity of positive solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 4107 ~ 4126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2021147	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naimen Daisuke, Shibata Masataka	4. 巻 33
2. 論文標題 Existence and multiplicity of positive solutions of a critical Kirchhoff type elliptic problem in dimension four	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 223 ~ 246
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kurata Kazuhiro, Shibata Masataka	4. 巻 491
2. 論文標題 Least energy solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 124297 ~ 124297
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2020.124297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sato Yohei, Shibata Masataka	4. 巻 6
2. 論文標題 Nonlinear scalar field equations with Berestycki-Lions' nonlinearity on large domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Elliptic and Parabolic Equations	6. 最初と最後の頁 711 ~ 731
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41808-020-00079-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Iriyeh Hiroshi, Shibata Masataka	4. 巻 169
2. 論文標題 Symmetric Mahler's conjecture for the volume product in the $3n$ -dimensional case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1077 ~ 1134
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00127094-2019-0072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naimen Daisuke, Shibata Masataka	4. 巻 186
2. 論文標題 Two positive solutions for the Kirchhoff type elliptic problem with critical nonlinearity in high dimension	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 187 ~ 208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2019.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Adachi Shinji, Shibata Masataka, Watanabe Tatsuya	4. 巻 58
2. 論文標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 88-1,88-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-019-1527-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Iriyeh Hiroshi, Shibata Masataka	4. 巻 2023
2. 論文標題 Minimal Volume Product of Convex Bodies with Certain Discrete Symmetries and its Applications	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 18001 ~ 18034
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac284	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 凸体に関するMahler 予想について
3. 学会等名 さいたま数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 H^1 臨界項を持つ準線形楕円型方程式の正值解の漸近挙動
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 凸体に関するMahler 予想について
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 束縛条件下でのエネルギー最小化問題とリアレンジメント不等式
3. 学会等名 室蘭非線形解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 メトリックグラフ上の半線形楕円型方程式の正值解について
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 メトリックグラフ上の半線形楕円型方程式の正值解について
3. 学会等名 応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 メトリックグラフ上の半線形楕円型方程式の正值解について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Positive solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs
3. 学会等名 非線形偏微分方程式と変分問題（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Asymptotic behavior of positive solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs
3. 学会等名 非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 メトリックグラフ上の半線形楕円型方程式の正值解について
3. 学会等名 神楽坂解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Positive solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs
3. 学会等名 Geometric Aspects of Solutions to Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Minimal volume product of convex bodies with various symmetries
3. 学会等名 Conference on Convex, Discrete and Integral Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 凸体に関するMahler予想について
3. 学会等名 福岡大学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Least energy solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs
3. 学会等名 非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equations with H^1 -critical growth
3. 学会等名 Variational analysis on critical problems of nonlinear partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth
3. 学会等名 Mini Workshop on Variational Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会 関数方程式論分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 凸体に関するMahler 予想について
3. 学会等名 第47 回南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equations with H^1 -critical growth
3. 学会等名 Qualitative Theory on ODEs and its Applications to Mathematical Modeling (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 凸体に関するMahler 予想について
3. 学会等名 第13回非線形偏微分方程式と変分問題
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柴田将敬
2. 発表標題 Existence results of positive solutions to semi-linear elliptic problems on metric graphs
3. 学会等名 13th AIMS International Conference, SS37 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	足達 慎二 (Adachi Shinji) (40339685)	静岡大学 (13801)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	入江 博 (Iriyeh Hiroshi) (30385489)	茨城大学 (12101)	
研究協力者	倉田 和浩 (Kurata Kazuhiro) (10186489)	東京都立大学 (22604)	
研究協力者	佐藤 洋平 (Sato Yohei) (00465387)	埼玉大学 (12401)	
研究協力者	内免 大輔 (Naimen Daisuke) (20783278)	室蘭工業大学 (10103)	
研究協力者	渡辺 達也 (Watanabe Tatsuya) (60549749)	京都産業大学 (34304)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関