

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03360

研究課題名(和文)病的函数を初期値とする Hamilton-Jacobi flow の研究

研究課題名(英文) Study on Hamilton-Jacobi flows with initial data of pathological functions

研究代表者

藤田 安啓 (Fujita, Yasuhiro)

富山大学・学術研究部理学系・教授

研究者番号：10209067

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：今回の研究課題の最大の目的である Hamilton--Jacobi flow の挙動から初期値の至る所微分不可能性を導くという逆問題を肯定的に解決することができた。この結果は以下の論文の欄の 5 番目に挙げている論文として既に *Mathematische Annalen* のオープンアクセスとして見るできるようになっている。さらに、この論文では最初に取り関る閉区間 $[0,1]$ の分割として、以前の論文で考えていた等分割のものだけでなく、より一般的な分割まで許容することができている。このように、相当良い結果を導くことができ今回の研究は成功ということができると思う。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の研究結果から得られる学術的な意義は、Hamilton--Jacobi 方程式の初期値問題の解として定義される Hamilton--Jacobi flow における正則効果がかなり「弱い」ことへの再認識である。なぜなら、この正則効果が強ければ、初期値の至る所微分不可能性などの悪い性質も時間とともに一気に解消されて、Hamilton--Jacobi flow から初期値の至る所微分不可能性を見出すことはできなくなると考えられるからである。これは、今後 Hamilton--Jacobi 方程式の初期値問題の正則効果へのひとつの見方を与えると考え重要な意義であると確信する。

研究成果の概要(英文)：The most important aim of this work is to derive nowhere differentiable property of the initial data from some behavior of the Hamilton-Jacobi flows issued from these data. This is a sort of inverse problem. I have achieved this aim by solving this problem affirmatively. The results could be now read in an electric paper of *Mathematische Annalen* via Open Access. Furthermore, as the partition of the interval $[0,1]$ which is first chosen, we can admit not only the one of equal division but also almost all ones. In the previous papers, we only considered the partition of equal division. In these senses, I believe that I have succeeded in this work.

研究分野：数理解析学

キーワード：Hamilton--Jacobi flow 至る所微分不可能性 逆問題 正則効果

1. 研究開始当初の背景

研究開始時において、研究代表者とそのグループは、実数直線上の周期 1 をもつ連続関数を初期値とする、ある Hamilton-Jacobi 方程式の初期値問題の解として定義される Hamilton-Jacobi flow について、特に初期値が病的函数のときの flow が満たす幾何学的性質について世界に先駆けて注目し、3 つの招待講演を終えるとともに論文の執筆を始めていた。ここで、函数が病的であるとは、その函数が至る所連続で至る所微分不可能なことである。当時も（そして多分現在も）Hamilton-Jacobi flow と病的函数を結び付けた研究は、私たちのグループの研究を除いて存在しない。

「Hamilton-Jacobi 方程式の初期値問題で初期値が病的函数のときどのような面白いことが出てくるのか？」という問いに対しての当時の答えは、数値解析を行ってみると極めて美しい解の挙動を見ることができであった。特に、初期値として代表的な病的函数である高木函数を取ったときの数値解析で見る解の挙動は美しいというより、ある種の気品を感じさせるものになっていた。この挙動を明らかにしたい、この挙動を作り出している主要素は何なのか知りたい？ その『問い』が本研究のスタートポイントであった。

2. 研究の目的

今回の研究の目的は、病的函数を初期値とする Hamilton-Jacobi 方程式の初期値問題の解として定義される Hamilton-Jacobi flow が有する幾何学的性質を導き、逆にそのような幾何学的性質をもつ際の初期値である函数のクラスを完全に特徴づけることであった。また、このクラスの函数の性質を明らかにして病的函数の新たな応用の可能性を提示しようとした。

本研究の学術的独自性としては、従来あまり顧みられなかった病的函数というものを、それを初期値とする Hamilton-Jacobi flow を通して見るという、これまで全く存在していないアイデアに基づき新たな解析学を展開して行こうとしていることであった。

さらに、本研究の創造性としては、病的函数を初期値とする Hamilton-Jacobi flow がもつ独自の幾何学的性質を明らかにすると同時に、この幾何学的性質をもつ際の病的函数の特徴づけを行うことにより、病的函数を分類し新たな解析学を創ろうとしていることであった。

3. 研究の方法

研究の方法として、共同研究者である本研究課題の連携研究者や海外研究協力者と討論を重ねて研究を深めていくことがまず挙げられる。そのため、次のような研究グループを作った。

研究グループ：連携研究者（連）と海外研究協力者（海）の氏名・所属・担当分野

氏名	所属	担当分野
山口 範和 准教授（連）	富山大学・学術研究部教育学系	偏微分方程式の数値解析
浜向 直 准教授（連）	北海道大学・理学院	偏微分方程式の粘性解理論
Antonio Siconolfi 准教授（海）	ローマ大学サピエンツァ校	函数の微分不可能性の理論

研究グループ：分担者（2021 年度のみ）の氏名・所属・担当分野

氏名	所属	担当分野
山口 範和 准教授	富山大学・学術研究部教育学系	偏微分方程式の数値解析

上に挙げた共同研究者 3 人（連携研究者 2 人と海外研究協力者 1 人）からはいつでもアドバイスを頂ける良好な関係にあり、たがいに訪問できないときは e-mail

などを通じて連絡を密にしていた。特に、2021年度は、連携研究者の山口 範和氏には分担者になってもらい、論文に使うさらに精密な数値シミュレーションを実行してもらおうと同時に、論文の執筆・校正時において、私が欲しい図を作成してもらったり、新たなアイデアを出してもらおうなど重要な役割を担ってもらった。ここで、数値解析を駆使して解の短時間での挙動の概略を掴んでいこうとすることはとても重要であった。実際、理論的には現段階でできないことも数値解析を使えば概略を掴むことは可能と思われるからである。そこで、数値解析を使い解の短時間での挙動の概略を掴み研究の進展を図るとともに、現象の可視化と意味づけを行い理論を深化させて行こうとした。

4. 研究成果

まず、第一に挙げる研究成果は、今回の研究課題の最大の目的である Hamilton–Jacobi flow の挙動から初期値の至る所微分不可能性を導くという逆問題を肯定的に解決することができたことである。この結果は以下の論文のオープンアクセスとして既に見られるようになっている。

Hamilton–Jacobi flows with nowhere differentiable initial data,
to appear in *Mathematische Annalen*

<https://doi.org/10.1007/s00208-021-02353-w>

Fujita, Y., Siconolfi, A., Yamaguchi, N., Open Access

この論文では、病的函数を初期値とする Hamilton–Jacobi flow の挙動に現れる特別な事象に注目して、逆にこの特別な事象が起きるような初期値をすべて特徴付けようとした。これは flow の挙動から初期値の性質を導くという逆問題である。この場合、初期値を規定する区間の分割にひとつ条件を付けることになるが、この特別な事象を引き起こす初期値は、私たちの研究グループが 2020 年に出した論文で使ったクラスを一般化したクラスに属する元として特徴付けられることを示すことに成功した。この意味において、今回の研究は極めて成功したと言ってよいと思う。さらに、この研究グループでこの 4 年間に出了た、上記論文以外の、3 本の論文はすべて、今回の研究課題の遂行に欠かせないものとなっており、この 4 年間は方向性を含め成果の点でも良かったと言ってよいと思う。それ以外にも、別のグループと出した論文が 1 本ある。

上記の Open Access は 2022.02.15 から見られるようになっているが、現時点 2022.05.31 で 295 件のアクセスがあり、1 日当たり 3 件弱のアクセスであり (Springer の *Mathematische Annalen* による)、極めて高いアクセス率と言っても良いと思う。今後、類似の結果や拡張などがどの程度現れるかは分からないが、現時点でのアクセス率から見て今後も注目を集める研究結果と言えると思う。

また、上記研究グループとして、6 回の講演をしている (そのうち、1 回は日本数学会 2020 年度秋季総合分科会であり、学会はコロナ禍のため中止となったが、講演は成立)。コロナ禍のため、2020 年以降は実際の講演はない。幸いなことに、2022.06.25 に早稲田大学で開かれる応用解析セミナーでの招待講演を予定している。コロナ禍のため、これが最初の上記論文の結果に関する発表である。極めて重要な発表の場としてとらえており、十分な準備をもって臨み聴衆の方に良い印象をもってもらえるとともに、今後も増えるであろう講演機会の良い雛形になるようにしたい。この意味で、本研究課題の成果は既に良い結果が得られているが、直接人前で話す機会がなく展望については希望的観測に基づき良いものになると思うが、いまだ不確かな部分もある。今後も研究成果の発展や発表の工法に努めていきたいと思う。

研究成果の分かりやすい説明のため、上記論文に基づき以下にいくつかの図とその解説を与える。

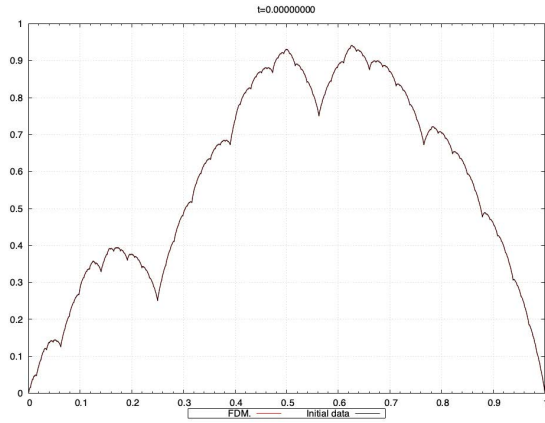


FIGURE 1. The graph of the initial data.

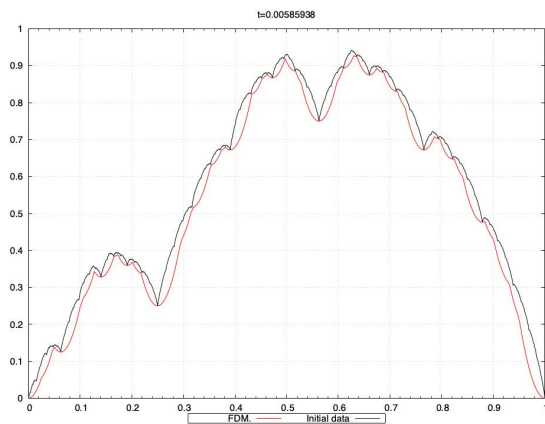


FIGURE 2. The graph of the flow at $t = 0.00585938$.

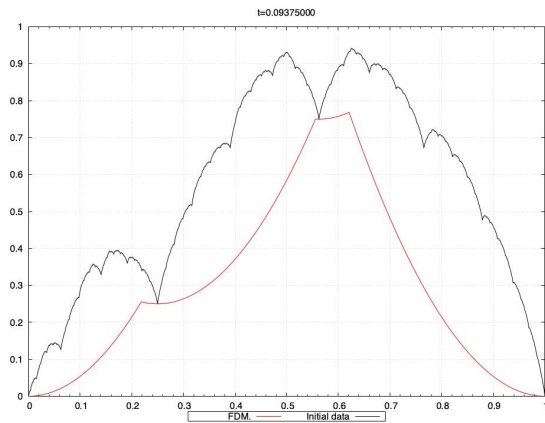


FIGURE 3. The graph of the flow at $t = 0.09375$.

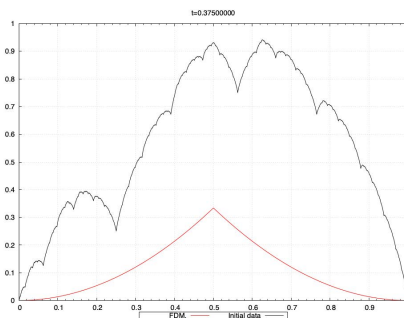


FIGURE 4. The graph of the flow at $t = 0.375$.

前頁の Figure 1 (図 1) は今回の研究成果の結果作られたクラスに属する区間 $[0, 1]$ 上の函数であり、これが初期値となる。この函数は、周期 1 をもち \mathbb{R} 上に拡張されるが、便宜上区間 $[0, 1]$ でのみ描いている。この函数は病的函数 (至る所連続で至る所微分不可能な函数) を作図上近似したものである。高木函数は $x = 1/2$ に関して対称になっているが、この函数は $x = 1/2$ に関して対称ではない。念のため再び強調するが、この函数は病的函数の作図上の近似である。これが近似であるにもかかわらず、出てくる flow はかなりの精度で理論的結果を反映しており、この作図から得られる結果からの情報はかなり有益なものとなる。

前頁の Figure 2 (図 2) は、時間がほんの少しだけ経過したときの flow の様子を表している。黒い曲線は Figure 1 (図 1) で説明した初期値の函数である。また、赤い曲線は時間がほんの少しだけ経過したときの flow である。時間がほんの少しだけ経過した図のため、赤と黒の 2 つの曲線は大変近い。

この研究課題では運動エネルギーに対応する Hamiltonian $H(p) = p^2/2$ のときのみを考えているので、この場合の赤い曲線は常に区分的に 2 次函数となる。すなわち、赤い曲線は各小区間ごとに放物線となっている。この各小区間と放物線は初期値と時刻により異なるが、初期値を与えればこの各小区間と放物線は理論的には決定できる。時間がほんの少しだけ経過した図を出した理由は、時間が十分経つと同じような図 (例えば、Figure 4 (図 4) のような形) しか現れず、物事が単純化する代わりに、初期値への依存の形を表す部分が消えてしまうからである。

前頁の Figure 3 (図 3) は、ある程度時間が経過したときの flow の様子を表している。Figure 2 (図 2) と同様に、黒い曲線は Figure 1 (図 1) で説明した初期値の函数である。また、赤い曲線は時間がある程度経過したときの flow である。時間がある程度経過したときの図のため、赤と黒の 2 つの曲線はかなり離れる。Figure 2 (図 2) でも説明したように、この研究課題では運動エネルギーに対応する Hamiltonian $H(p) = p^2/2$ のときのみを考えているので、この場合の赤い曲線はやはり区分的に 2 次函数となる。すなわち、赤い曲線は各小区間ごとに放物線となっている。Figure 3 (図 3) では赤い曲線は各小区間ごとに放物線となっていることは時間の経過に伴い見やすくなっている。

前頁の Figure 4 (図 4) は、十分時間が経過したときの flow の様子を表している。Figure 2 (図 2) と同様に、黒い曲線は Figure 1 (図 1) で説明した初期値の函数である。また、赤い曲線は時間が十分経過したときの flow である。

時刻は $t = 0.375$ であるが、これで十分時間が経っていることが次のように説明される。各初期値に対してある時間が経過すると、flow は $x = 0$ と $x = 1$ を頂点とする 2 つの放物線のうち小さい部分を繋げたグラフとなることが理論的に示される。この時刻は各初期値によって変わるが、今は $t = 0.375$ である。このグラフは明らかに区分的に 2 次函数となる。

以上、Figures 1~4 (図 1~4) は、Figure 1 (図 1) の初期値のグラフが時間とともにどのように発展していくかを示している。今回の最大の成果は、Figures 1~4 (図 1~4) で代表される flow のグラフの特徴を決定して、逆に flow にそのグラフの特徴が現れたとき、初期値が私たちの研究グループが作った関数のクラスに属する元であることを示し、その初期値が病的函数であることの証明に成功したことである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Fujita, Y., Hamamuki, N., Siconolfi, A., Yamaguchi, N.	4. 巻 160
2. 論文標題 A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 343--359
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10474-019-01007-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujita, Y., Hamamuki, N., Yamaguchi, N.	4. 巻 71
2. 論文標題 A self-affine property of evolutional type appearing in a Hamilton--Jacobi flow starting from the Takagi function	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 105-120
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/20195782	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fujita, Y., Hamamuki, N., Yamaguchi, N.	4. 巻 1:38
2. 論文標題 All the generalized characteristics for the solution to a Hamilton--Jacobi equation with the initial data of the Takagi function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SN Partial Differential Equations and Applications "Viscosity solutions - Dedicated to Hitoshi Ishii on the award of the 1st Kodaira Kunihiko Prize"	6. 最初と最後の頁 20pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-020-00039-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bolley, F., Cordero-Erausquin, D., Fujita, Y., Gentil, I., Guillin, A.	4. 巻 2020
2. 論文標題 New sharp Gagliardo--Nirenberg--Sobolev inequalities and an improved Borell--Brascamp--Lieb inequality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices, IMRN	6. 最初と最後の頁 3042--3083
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rny111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujita, Y., Siconolfi, A., Yamaguchi, N.	4. 巻 -
2. 論文標題 Hamilton--Jacobi flows with nowhere differentiable initial data	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-021-02353-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 藤田 安啓、山口 範和、浜向 直
2. 発表標題 高木函数を初期値とする Hamilton-Jacobi 方程式における特異性の伝播
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会, 函数方程式分科会 学会は中止 (講演は成立), 熊本大学
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Fujita, Y.
2. 発表標題 至る所微分不可能な函数と Hamilton-Jacobi flow
3. 学会等名 福岡大学解析セミナー 2019.12.07 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fujita, Y.
2. 発表標題 Hamilton-Jacobi 方程式に現れる時間発展型のself-affine 性
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会, 函数方程式分科会 2019.09.18, 金沢大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Fujita, Y.
2. 発表標題 A self-affine property appearing in a Hamilton--Jacobi flow starting from the Takagi function
3. 学会等名 New trends in Hamilton-Jacobi: PDE,Control,Dynamical Systems and Geometry, 2019.07.01-06, Fudan University, Shanghai, China (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y.Fujita
2. 発表標題 A geometrical characterization of a class of nowhere differentiable functions
3. 学会等名 International Conference "Viscosity Solutions and Related Topics", 東北大学理学研究科(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y.Fujita
2. 発表標題 A class of everywhere continuous and nowhere differentiable functions and its connection with a Hamilton-Jacobi equation
3. 学会等名 The tenth meeting on Probability and PDE,, 津田大学(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

藤田研究室のホームページ
<https://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	山口 範和 (Yamaguchi Norikazu) (50409679)	富山大学・学術研究部教育学系・准教授 (13201)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連 携 研 究 者	山口 範和 (Yamaguchi Norikazu) (50409679)	富山大学・教育学部・准教授 (13201)	
連 携 研 究 者	浜向 直 (Hamamuki Nao) (70749754)	北海道大学・理学院・准教授 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
イタリア	ローマ大学サピエンツァ校		