

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 27 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03361

研究課題名(和文) Feynman経路積分の数学的研究とその量子電磁力学・量子情報理論への応用

研究課題名(英文) Mathematical study of the Feynman path integrals and its application to quantum electro dynamic and quantum information theory

研究代表者

一ノ瀬 弥 (Ichinose, Wataru)

信州大学・理学部・特任教授

研究者番号：80144690

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：Feynman経路積分の数学的に厳密な研究を行った。

(1) 粒子の位置の連続的な量子測定を表す制限Feynman経路積分を定式化した(2023)。(2) 量子力学の公理から制限Feynman経路積分の導出を証明した(投稿中)。(3) 位相空間Feynman経路積分を直接解析する方法を確立した(準備中)。(4) 多項式オーダーで増大するポテンシャルを持つシュレディンガー方程式に対するFeynman経路積分を定式化した(2018)。(5) Dirac方程式に対するFeynman経路積分の定式化を行った(2018)。(6) Dirac方程式に対する非相対論的近似公式を証明した(準備中)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) 量子測定理論は、量子情報理論の重要な分野の一つである。本研究では、粒子位置に関する連続的な量子測定理論のFeynman経路積分による定式化(制限経路積分)の数学的意味付けを与えた(2023)。(2) 位相空間経路積分に関する基本的結果を導いたことにより、粒子の運動量・エネルギー等の一般の物理量に関する量子測定を定式化するFeynman経路積分の研究の準備が整った(準備中)。(3) Dirac方程式に対するFeynman経路積分を定式化することにより、量子電磁気学の経路積分による定式化の準備が整った(2018)。

研究成果の概要(英文)：A mathematically rigorous study of the Feynman path integral was carried out.

(1) The restricted Feynman path integral, which represents a continuous quantum measure of the position of a particle, was formulated (2023). (2) Proved the derivation of the restricted Feynman path integral from the axioms of quantum mechanics (in submission). (3) A direct analysis of the phase space Feynman path integral was established (in preparation). (4) The Feynman path integral for the Schroedinger equation with potentials increasing on polynomial order was formulated (2018). (5) The Feynman path integral for the Dirac equation was formulated (2018). (6) Non-relativistic approximation formulations for the Dirac equation were proved (in preparation).

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：位相空間Feynman経路積分 制限Feynman経路積分 Pauli方程式 量子連続測定 Dirac方程式 相対論的Feynman経路積分

様式 C - 19, F - 19 -1, Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

(I) 位相空間Feynman経路積分に関する本研究の学術的背景

位相空間Feynman経路積分の数学的研究は、申請者の論文(2000,2002)まで殆どなされていなかったため、学術的背景は申請者の研究が中心となる。

申請者は論文(2000,2002)で、Schroedinger方程式に対して、又論文(2007)でスピンを持った粒子の運動を記述するPauli方程式に対して、位相空間Feynman経路積分を一般的な仮定の下で数学的に定義した。従来の方法と異なり、一般化運動量の代わりに力学的運動量を用い、ゲージ不変な位相空間Feynman経路積分を構成した。

(1) 申請者は論文(2006)で、位相空間内の経路に関する汎関数を重みとして持つ、Schroedinger方程式に対する位相空間Feynman経路積分の収束・発散の研究を行なった。

(2) 申請者は論文(2014,2018)で、Dirac方程式に対する経路積分を、位相空間Feynman経路積分を用いることによって、数学的に定義することに成功した。

上記申請者の論文では、Schroedinger方程式に対する位相空間Feynman経路積分に関する結果は、運動量空間の全ての経路についての「和」を計算して、配位空間Feynman経路積分に変形位相空間Feynman経路積分の数学的研究は、申請者の論文

(2000,2002)まで殆どなされていなかったため、学術的背景は申請者の研究が中心となる。一方、Dirac方程式の位相空間Feynman経路積分は直接的な解析が可能であった。

(II) 量子連続測定理論に関する本研究の学術的背景

量子計算など、量子情報の読み取りは量子測定(観測)によって行われる。この理由で、量子測定理論は量子情報理論の

中でも特に重要である。特に連続測定理論は、測定が有限時間続くという意味で現実的なものであり、工学の理論にも応用されている。

量子測定理論の主なものは、瞬間測定に関するvon Neumannの射影仮説(1932)である。そこでは、瞬間測定により測定値が得られれば、直ちに確率振幅は測定値に対応する空間に射影される(波束の収縮)。又、有限時間の間の量子連続測定は、各時刻で瞬間測定を行い、その量子状態の連続極限で定義される。

一方、Feynman経路積分を用いた量子測定のアイディアは、Feynman(1948)に基づく。連続測定を行えば、その測定結果から測定誤差も考慮に入れて、粒子が通る経路の集合が特定される。連続測定による粒子の波動関数は、この特定された経路の集合上のFeynman経路積分で表される。Feynmanのアイディアから、Menskyは連続測定に関する制限Feynman経路積分を提案した。

(1) 申請者は論文(2006)で、瞬間測定を行った時に位相空間Feynman経路積分が収束するための、測定量が満たすべき必要十分条件を定めた(不確定性原理)。

(III) 量子電磁力学に関する本研究の学術的背景

量子電磁力学理論とは、量子力学と特殊相対性理論を融合したもので、荷電粒子間の電磁相互作用は、光子が媒介する。経路積分に基づくFeynmanの`量子力学の定式化の方法'は、相対論的であるDirac方程式の研究を通じて、量子電磁力学理論に用いられ(1949,1950)、この研究でFeynmanは、朝永・Schwingerと共にノーベル賞を受賞した。但し、Feynmanは摂動論を用い、経路積分の構成はできなかった。

1949年 Dysonは論文で、次を示した。(1) Feynman、朝永、Schwinger 3人の理論は同等である。(2) 質量と電荷の繰り込みを行うことで、任意の摂動次数で、計算値を有限にできる。(3)

Feynmanが用いた経路図による計算法は、理論的に正当化できる。Dysonの論文では、Schroedinger-Heisenberg 相互作用表示に摂動論を適用し、極めて巧みでかつ繊細な議論が展開される。この手法は、現在一般的な場の理論の基本的な手法になっている。Dysonは、「Feynmanの経路積分による定式化の方法は、経路積分を実際に行う方法が何も提案されていないので、これを理論として用いることは出来ない」と述べている (Cornell大学での講義録 1951)。

(1) 申請者は、論文(2014)でDirac方程式に対する経路積分の定式化に成功した。

## 2. 研究の目的

1. Schroedinger方程式に対する位相空間Feynman経路積分を、配位空間Feynman経路積分を経ず直接的に解析する方法を確立する。これにより、「粒子の軌道運動がその粒子自身のスピン運動と相互作用する」項 (スピン軌道相互作用項) を含むPauli方程式など、一般的な方程式に対するFeynman経路積分を数学的に定義することが可能となる。
2. 最も基本的な測定である、粒子の位置の連続測定に関する制限Feynman経路積分を数学的に定義する。この結果は、工学への実際的な応用が期待される。
3. 相対論的電子を、Dirac方程式に対応する経路積分を用いて第2量子化し、相対論的量子電磁気学のFeynman経路積分の数学的構成を行う。摂動論的場の量子論は、繰り込み理論が非常に複雑である。この研究は、摂動論を用いない場の量子論を、経路積分を用いて展開するのが目的である。

## 3. 研究の方法

擬微分作用素などの振動型積分作用素の実解析的研究を用いて、Schroedinger方程式・Dirac方程式・相対論的量子電磁気学のFeynman経路積分の数学的研究を行う。

この研究課題達成を以下の方法で行なった。

1. 京都大学理学部・京都大学数理解析研究所など、国内の研究施設に出張し、研究発表・研究情報の収集を行なった。

2. 国際数理解析学会など、国際研究会に参加し、研究発表・研究情報の収集を行なった。

## 4. 研究成果

1. 粒子の位置の連続的な量子測定を、制限Feynman経路積分を用いて数学的に厳密に定式化するのに成功した(Osaka J.Math.2023)。
2. Menskyは、Feynmanの公理から制限経路積分を提案したが、その導入方法は現象論的であり論理的でなかった。本研究では、Neumannの射影公理とFeynmanの公理の各々から、自然に制限Feynman経路積分が導出されることを示した。次にこの結果を用いて、2重スリット実験とAharonov-Bohm効果に関する実験に関する理論の正確な定式化を行った(Osaka J. Math.に投稿中)。
3. 位相空間Feynman経路積分を直接解析する方法を確立し、この方法を用いて、スピンと「粒子の軌道」が相互作用するThomas項を持つPauli方程式に対する位相空間Feynman経路積分を定式化した(投稿準備中)。
4. 空間方向に多項式オーダーで増大するポテンシャルを持つSchroedinger方程式に対するFeynman経路積分を定式化するのに成功した(RMP2020)。この問題は、経路積分理論における懸案の問題であり、本研究でこれに最終的な結果を与えた。
5. Dirac方程式にたいするFeynman経路積分の構成を、申請者の2014の論文より一般的な形で与えた(JPDOA 2018)。

6. Dirac方程式にたいする 非相対論的近似  
(光速度 $c$ を無限大にする) 公式を厳密に  
証明した (投稿準備中)。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 60
2. 論文標題 On the mathematical formulation of the restricted Feynman path integrals through broken line paths	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 105-132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 32
2. 論文標題 On the Feynman path integral for the magnetic Schroedinger equation with a polynomially growing electromagnetic potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Rev. Math. Phys	6. 最初と最後の頁 1-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055S20500038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Wataru Ichinose & Takayoshi Aoki	4. 巻 11
2. 論文標題 Notes on the Cauchy problem for the self-adjoint and non-self-adjoint Schroedinger equations with polynomially growing potentials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.	6. 最初と最後の頁 703-731
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11868-019-00301-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 2
2. 論文標題 Feynman 経路積分の数学的結果	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理科学（特集「経路積分を考える - その変遷と基礎物理の発展」）	6. 最初と最後の頁 60-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 なし
2. 論文標題 On the Feynman path integral for the Schroedinger equations with polynomially growing potentials in the spatial direction	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第57回実函数論・函数解析合同シンポジウム講演集 <a href="http://mathsoc.jp/section/fctanalysis/2018.html">http://mathsoc.jp/section/fctanalysis/2018.html</a>	6. 最初と最後の頁 108-118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 なし
2. 論文標題 Feynman経路積分による量子連続測定の数学理論 - 位置とスピンの測定	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 電子情報通信学会・量子技術研究会講演集	6. 最初と最後の頁 83-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wataru Ichinose	4. 巻 9
2. 論文標題 Notes on the Feynman path integral for the Dirac equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.	6. 最初と最後の頁 789-809
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11868-017-0227-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Wataru Ichinose
2. 発表標題 A mathematical theory from the projection postulate to the restricted Feynman path integral for a continuous position measurement
3. 学会等名 夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Wataru Ichinose
2. 発表標題 On the Feynman path integral with potentials growing polynomially in the spatial direction
3. 学会等名 実関数論・函数解析合同シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Wataru Ichinose
2. 発表標題 Mathematical theory of the Feynman path integrals for quantum continuous measurement of positions and spin
3. 学会等名 国際数理物理学会（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Wataru Ichinose
2. 発表標題 Feynman経路積分による量子連続測定の数学理論—位置とスピンの測定
3. 学会等名 電子情報通信学会第38回量子情報技術研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Wataru Ichinose
2. 発表標題 The relativistic covariance of the Feynman path integral for the Dirac equation
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------