

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03362

研究課題名（和文）準線形楕円型偏微分方程式の解構造への変分的アプローチ

研究課題名（英文）Variational approaches to some class of quasilinear elliptic equations

研究代表者

足達 慎二（Adachi, Shinji）

静岡大学・工学部・教授

研究者番号：40339685

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：準線形楕円型方程式の解構造に関して、特に正値解の一意性とその漸近挙動を変分的手法を用いて明らかにした。この準線形楕円型方程式は双対変分構造を持ち、方程式を半線形楕円型方程式に変換することで研究を進めることができる。このアプローチの副産物としてスカラー場型半線形楕円型方程式の正値解の一意性に関する従来の研究成果を拡張することもできた。正値解の漸近挙動に関しては正値解を適切に自己相似変換した関数がタレンティ関数に収束することを明らかにし、漸近的プロファイルを完全に解明した。また、遠方での増大度条件を全く課さない半線形楕円型方程式に対して、正値解の存在やその漸近挙動を解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年臨界点理論の発展に伴い、準線形楕円型方程式への変分的手法の適用について活発に研究されるようになり、特にプラズマ物理学に端を発するシュレディンガー方程式の定在波解を与える準線形楕円型方程式の変分的研究が当該分野の主題のひとつとなっている。本研究ではこの方程式の解構造、特に正値解の一意性およびその漸近挙動、漸近的プロファイルを明らかにした。この研究成果は従来の優線形劣臨界増大度の非線形項を持つ半線形楕円型方程式に対する研究にも新たな切り口を与えた。また、数学的厳密化は物理学的応用研究の発展にも寄与できる大きな意義のある研究である。

研究成果の概要（英文）：By using variational methods, I studied the uniqueness of positive solutions and its asymptotic behavior for some class of quasilinear elliptic equation. Since this quasilinear elliptic equation has a dual variational structure, I could transform quasilinear elliptic equation into a semilinear one. As a byproduct of this approach, I also could extend previous works on the uniqueness of positive solutions for some semilinear elliptic equations of scalar field type. As for the asymptotic behavior, I found that an appropriate self-similar transformation of positive solution converges to the Talenti function, and the asymptotic profile is completely revealed. I also clarified the existence of positive solution and its asymptotic behavior for semilinear elliptic equations that do not impose any growth condition at infinity.

研究分野：偏微分方程式，変分解析

キーワード：準線形楕円型方程式 変分解析 正値解 漸近挙動

1. 研究開始当初の背景

適切な関数空間上で定義された汎関数に対してその臨界点を求める問題を変分問題という。近年、プラズマ物理学に端を発するシュレディンガー方程式の定在波解を与える準線形楕円型方程式の変分的研究が当該分野の主要課題のひとつとなっている。しかし、準線形楕円型方程式は主要部の準線形性と非線形項の非線形性が複雑に絡み合い解析は容易ではないので、先行研究成果も限定的なものが多く、より広汎な研究成果、本質的な構造理解が期待されていた。本研究はそのような研究動向の中で、絶対零度下における液体ヘリウム膜の超流動状態を記述する準線形シュレディンガー方程式の定在波解を与える準線形楕円型方程式の解構造の解明を目指した。この方程式に対しては2004年にColin-Jaen-Jeanによって双対アプローチと呼ばれる方程式の双対変分構造に着目した変分的定式化が提唱され、この方法を用いて活発な研究が行われるようになった。研究代表者は双対アプローチを数理モデルとして重要な場合を包含する形で一般化し、拡張した一般化双対アプローチを用いて方程式に対する変分的研究を率先してきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は変分的アプローチを用いて準線形楕円型方程式の解構造を解明することである。特に正值解の一意性、非退化性と準線形項に付随するパラメータを限りなく0に近づけた時の漸近挙動および漸近的プロファイルを明らかにすることを目的とする。また、準線形項および非線形項の一般化も視野に入れ、一般化双対アプローチを直接適用できないタイプの準線形楕円型方程式の変分解析へ繋げられるように解構造の本質的理解を目指す。

3. 研究の方法

長年共同研究を続けてきた柴田将敬氏(名城大学)、渡辺達也氏(京都産業大学)を研究分担者に迎え入れ、以下のテーマについて研究を行った。

(1) 準線形楕円型方程式に対する正值解の一意性、非退化性

一般化双対アプローチを用いて方程式を半線形楕円型方程式に変換し、この半線形楕円型方程式の正值解の一意性を示すことで、もとの準線形楕円型方程式に対する正值解の一意性を示す。この方針においては半線形楕円型方程式の一意性に関する先行研究成果を拡張することが必要となる。正值解の一意性が得られるとそこから方程式に対応する線形化作用素の定性的な性質を解析でき、正值解の非退化性も示すことができる。

(2) 正值解の漸近挙動および漸近的プロファイルの解明

準線形項に付随するパラメータを0に近づけた時の正值解の漸近挙動について、特に非線形項の増大度がソボレフ臨界の場合について研究を行う。非線形項の増大度がソボレフ劣臨界の場合はスカラー場型半線形楕円型方程式からの摂動として捉えることができる。一方、ソボレフ優臨界の場合は爆発現象が起こることが知られている。これらに対してソボレフ臨界の場合は準線形項から決まる方程式の斉次性と非線形項のそれがつり合うケースとなっており、それ故、漸近挙動の解析は長らく未解決であった。ここでは試験関数のエネルギー評価をより精密に行うことにより、正值解を適切に自己相似変換したものがタレンティ関数に収束することを示す。

4. 研究成果

(1) 準線形楕円型方程式に対する正值解の一意性、非退化性

スカラー場型半線形楕円型方程式の正值解の一意性に関しては非線形項の増大度が優線形劣臨界の場合においては(ほぼ)解決しているが、この研究成果を非線形項の増大度が劣線形の場合に拡張し、この拡張した結果を一般化双対アプローチによって変換した半線形楕円型方程式に直接適用することにより、方程式に含まれるパラメータや非線形項の増大度に対する制限なしに正值解の一意性を示すことができた。さらに準線形項をより一般化した方程式に対しても正值解の一意性を示すことに成功した。正值解の一意性についてはパラメータや非線形項の増大度などに制限を付けた部分的な解決しかなかったが、本研究により完全解決した。また、スカラー場型半線形楕円型偏微分方程式の正值解の一意性に関する既存研究成果は最新ののもでも20年以上前のものであり、本研究によって停滞していた理論に新たな切り口が与えられた。

正值解の一意性に関する既存研究成果の拡張については、方程式の非線形項から構成されるgrowth functionと呼ばれる関数の挙動をスツルムの比較定理などを用いて詳細に調べることによって、非線形項の増大度が劣線形の場合においても正值解の一意性を示すことができた。スカラー

場型半線形楕円型方程式は(非線形シュレディンガー方程式など)様々な数理物理モデル等に現れ、元となる物理モデルからの要請でエネルギー最小解(基底状態解)を詳しく調べることは重要であり、また、多くの基底状態解は正值解である。本研究により基底状態解の一意性に関する数学的正当化範囲を拡張することができた。

この結果を準線形楕円型方程式に対する正值解の一意性、非退化性へ応用する場合、一般化双対アプローチによって、方程式をスカラー場型半線形楕円型方程式へ変換することになるが、この変換の際に用いる関数の漸近形状などを詳しく調べる必要がある。これらを詳しく解析することで、準線形項の一般化にも成功した。

(2) 正值解の漸近挙動および漸近的プロファイルの解明

正值解の漸近挙動は非線形項の増大度と密接な関係があり、増大度が優線形ソボレフ劣臨界の場合とソボレフ優臨界の場合は研究代表者および分担者の共同研究により詳細な結果が得られていた。これに対して増大度がソボレフ臨界の場合は極限方程式のスケール不変性によりエネルギー最小レベルの極限の一意性が不明であり、従来ケース(優線形ソボレフ劣臨界の場合またはソボレフ優臨界の場合)とは全く様相が異なる問題となっている。本研究では試験関数のエネルギー評価を2次の項まで詳細に行うことにより、正值解を適切に自己相似変換したものがタレンティ関数に収束することを示すことに成功した。さらに、この収束が部分列に依らないことも示すことができた。空間4次元以上では極限の一意性を比較的容易に示すことができたので、部分列に依らない収束も比較的簡単に示すことができた。これに対して、空間3次元の場合はタレンティ関数が2乗可積分空間に属さないことが要因となり問題がさらに複雑になる。ここでは試験関数の構成方法に修正を加えたことにより、4次元以上の場合よりもさらに詳細なエネルギー評価が可能となり、問題を解決することができた。

(3) その他の研究成果

一般化双対アプローチを用いて準線形楕円型方程式を半線形楕円型方程式に変換すると遠方で劣線形の増大度を持つ半線形楕円型方程式が現れる場合があるが、これと関連して劣線形の増大度を持つ半線形楕円型方程式の特異摂動問題についても研究を行った。優線形劣臨界の増大度を持つ半線形楕円型方程式の特異摂動問題についてはその可解性や正值解のピークの位置とポテンシャルの形状との関係性など非常に多くの研究成果があるが、劣線形の増大度を持つ半線形楕円型方程式の特異摂動問題についてはそれらの多くが未解決である。本研究ではエネルギー最小解はコンパクトサポートを持つことを示した。この研究成果は優線形劣臨界の場合とは全く異なる結果であり、マルチピークを持つ高エネルギー解の構成に重要な知見をもたらす。

つぎに原点付近でのみ増大度の仮定を課し、無限遠方での増大度条件を全く課さない局所的に優線形な非線形項を持つ半線形楕円型方程式に対して、正值解の存在や漸近挙動についての研究も行った。この半線形楕円型方程式に対する研究は本研究の目的である準線形楕円型方程式の解構造解明へ向けた基礎研究であり、研究を進展させるために必要不可欠なものである。通常、非線形項に対して増大度を課さない場合、その方程式の可解性に対して変分的手法を直接適用して解析することは不可能である。本研究ではまず非線形項を適切に修正し、修正方程式に対して変分的手法を適用して正值解の存在を示し、次いで、修正方程式の解のアプリオリ評価を導出した。さらにこのアプリオリ評価を用いて、方程式に含まれるパラメータが十分に大きい場合、修正方程式の解が元の方程式の解となることを示した。このように一旦方程式を既存の臨界点理論が適用可能なように修正し、そこで得られた解が元の方程式の解であることを示す手法はよく用いられるものであるが、修正方程式と元の方程式との関係性についてはその都度、詳細な解析が必要となる。本研究では臨界値のアプリオリ評価とモーザーの反復法を組み合わせることにより、この関係性を明らかにすることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|------------------------|
| 1. 著者名 Adachi Shinji, Ikoma Norihisa, Watanabe Tatsuya | 4. 巻 172 |
| 2. 論文標題 Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a class of locally superlinear Schrodinger equation | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 manuscripta mathematica | 6. 最初と最後の頁 933--970 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-022-01428-5 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|--------------------------|
| 1. 著者名 Adachi Shinji, Watanabe Tatsuya | 4. 巻 507 |
| 2. 論文標題 G-invariant positive solutions for a class of locally superlinear Schrodinger equations | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications | 6. 最初と最後の頁 Art.125765 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2021.125765 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Shinji Adachi, Masataka Shibata, Tatsuya Watanabe | 4. 巻 101 |
| 2. 論文標題 Uniqueness of asymptotic limit of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth in R^3 , | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Applicable Analysis | 6. 最初と最後の頁 671--691 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00036811.2020.1757079 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|----------------------|
| 1. 著者名 Shinji Adachi, Masataka Shibata, Tatsuya Watanabe | 4. 巻 58 |
| 2. 論文標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equations with H^1 -critical growth | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations | 6. 最初と最後の頁 Art.88 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-019-1527-y | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|--------------------------|
| 1. 著者名 Shinji Adachi, Masataka Shibata, Tatsuya Watanabe | 4. 巻 38 |
| 2. 論文標題 A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 Acta Mathematica Scientia | 6. 最初と最後の頁 1121--1142 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/S0252-9602(18)30803-8 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 5件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 Shinji Adachi |
| 2. 発表標題 On the existence of ground state solutions to some elliptic equations with Sobolev critical growth |
| 3. 学会等名 Non-compactness phenomena on critical problems and related topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 足達慎二 |
| 2. 発表標題 Sobolev 臨界型の半線形楕円型方程式に対する基底状態解の存在について |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会 |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Shinji Adachi |
| 2. 発表標題 On the existence and asymptotic behavior of positive solutions for a class of locally superlinear elliptic equation |
| 3. 学会等名 Workshop on Variational Methods and Functional Inequalities (OCAMI) (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Shinji Adachi |
| 2. 発表標題 On the existence and asymptotic behavior of positive solutions for some elliptic equation with locally superlinear nonlinearity |
| 3. 学会等名 Workshop on recent progress in standing waves for nonlinear Schrodinger equations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 足達慎二 |
| 2. 発表標題 局所的優線形な非線形楕円型方程式の正值解の存在と漸近挙動について |
| 3. 学会等名 第181回神楽坂解析セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 足達慎二 |
| 2. 発表標題 局所的優線形なシュレディンガー型方程式の群不変正值解の存在について |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 足達慎二 |
| 2. 発表標題 半線形楕円型方程式の正值解の存在について |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 偏微分方程式の解の幾何的様相 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Shinji Adachi |
| 2. 発表標題 G-invariant positive solutions for some semilinear elliptic equations and their applications |
| 3. 学会等名 非線形微分方程式学術検討会（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 足達慎二 |
| 2. 発表標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Shinji Adachi |
| 2. 発表標題 Asymptotic profiles of ground states for a class of quasilinear elliptic equations |
| 3. 学会等名 JSPS Joint Research Projects “Variational study of nonlinear PDEs”（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|---|--------------------------------------|----|
| 研究分担者 | 柴田 将敬 (Shibata Masataka) (90359688) | 名城大学・理工学部・准教授 (33919) | |

6. 研究組織（つづき）

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------------------|---|--|----|
| 研究 分 担 者 | 渡辺 達也 (Watanabe Tatsuya) (60549749) | 京都産業大学・理学部・教授 (34304) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
| | |