

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03367

研究課題名(和文) 複素力学系の分岐によるパラメータ空間の構造の研究とその可視化

研究課題名(英文) Research on the structures of parameter spaces by bifurcation in complex dynamics and its visualization

研究代表者

稲生 啓行 (Inou, Hiroyuki)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：00362434

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Mandelbrot集合の自己相似性を始めとする様々な性質と深く関係しているくりこみについて研究し、新しいくりこみ可能な多項式や有理関数の例を構成した。それらを用いて高次元のパラメータ空間の分岐軌道の、1次元では現れない複雑な構造について解析を行った。また、ヴァーチャル・リアリティ機器を用いて複素2次元(実4次元)の点群を可視化し、インタラクティブに操作できるようにし、それを用いて分岐測度の台に「穴」が開いていることを発見し、数値的にその存在を検証した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Mandelbrot集合はその複雑な構造から多くの人を魅了している。この(境界の)一般化である複素力学系の族の分岐軌道は、更に複雑な性質を持つ。Mandelbrot集合は局所連結であると予想されているが、複素2次元(実4次元)以上の分岐軌道は局所連結とは限らない。本研究ではそのような更に複雑な集合を可視化し観察するための手法を構築し、また到達可能性や組み合わせ剛性といった局所連結性と関連した重要な性質に関して、高次元で初めて現れる複雑な現象について新たな知見を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：We studied renormalization, which is closely related to various properties of the Mandelbrot set, including self-similarity, and constructed new examples of renormalizable polynomials and rational functions. Using them, we analyzed the complicated phenomena of bifurcation loci in higher-dimensional parameter spaces which do not appear in one dimension. We also implemented an interactive visualization of point clouds in two complex dimensions (four real dimensions) with virtual reality devices, and by using them, we discovered a "hole" in the support of the bifurcation measure, and numerically verified its existence.

研究分野：複素力学系

キーワード：複素力学系 分岐 くりこみ ヴァーチャル・リアリティ

1. 研究開始当初の背景

(1) Mandelbrot 集合(の境界)については自己相似性などの様々な良い性質が知られているが、その複素力学系の他の族への一般化についてはまだわからないことが多く、特にパラメータ空間の次元が上がると本質的に異なる現象が現れる上に、実 4 次元以上になるために計算機による可視化も難しい。くりこみを用いた一般の族の相似性についての研究(稲生-Kiwi) 反正則力学系の族などの実 2 次元の空間での研究(Hubbard-Schleicher, 稲生-Mukherjee) や、多変数複素力学系での重要は手法である多重ポテンシャル論などを用いた研究(Dujardin-Favre など)などで新しい動きがあった。

(2) Hénon 写像の Julia 集合や、1 次元力学系の 2 次元のパラメータ空間の分岐測度といった、複素力学系に現れる複素 2 次元の複雑なフラクタル集合の可視化は宇敷・稲生が以前から取り組んでいたが、2016 年のいわゆる「VR 元年」以降、VR 機器が急速に一般化・発展したことで、その流れに乗って複素 2 次元(実 4 次元)の VR 機器を用いたインタラクティブな可視化手法を構築することが急務となっていた。

2. 研究の目的

本研究の主目的は、高次元パラメータ空間の構造を理解することであり、そのために様々な力学系の構成や分岐について調べ、また計算機を用いた可視化の技術の開発を行った。具体的には以下を目指して研究を行った。

(1) 反正則 2 次多項式族を代表とする、反正則力学系の実 2 次元パラメータ空間は、2 回合成が正則になることから、複素力学系の特殊な対称性を持つパラメータ族とみなすことができる。反正則 2 次多項式族の Mandelbrot 集合の類似物(tricorn と呼ばれる)は局所連結でなく(Hubbard-Schleicher)、外射線が 1 点に収束するとは限らず(稲生-Mukherjee)、また Mandelbrot 集合において自己相似性を与える写像(straightening map)は連続にならない(稲生-Mukherjee)。このように高次元パラメータ空間特有の特徴の多くを備えているため、双曲成分の到達可能性/不可能性などの、更に詳しい性質を調べることで、高次元パラメータ空間の研究の手がかりを得たい。

(2) 分岐測度は、多変数複素力学系の研究で盛んに用いられているポテンシャル論的な手法を用いてパラメータ空間を理解しようとする自然に現れる重要な研究対象である。Dujardin-Favre の結果で、多項式族の分岐測度は stretching ray (外射線の一般化)を用いて、臨界点の外射線の組の空間の Lebesgue 測度の push-forward として得られること(到達定理)、また分岐測度の台は Misiurewicz なパラメータ全体の集合の閉包に一致することなどが知られている。これらを踏まえて以下の問題を考えた。

① stretching ray は数値的に計算できるので、これを用いて分岐測度を数値的に求めることができる。従って VR 機器を用いてインタラクティブに分岐測度を可視化して観察することが可能である。このような可視化技術を用いて、よりよい表示・操作方法を開発すること、また複素力学系に現れる複素 2 次元の複雑な集合を数値的に詳細に計算する方法を開発することで、このような複雑な集合の構造を詳しく観察し、新たな知見を得たい。

② Misiurewicz な力学系からの摂動は扱いやすく、その閉包に含まれるかどうかの判定は比較的容易なことが多い。これを用いて分岐測度の台がパラメータ空間の分岐軌道の中でどの程度大きいのか、どのような力学系を含む/含まないのかを判定したい。

(3) パラメータ空間の(自己)相似性は、くりこみと呼ばれる現象と密接に関係している。くりこみを用いた Mandelbrot 集合の自己相似性を与える写像の一般化である straightening map は既に定式化されている(稲生-Kiwi)が、全射性などの基本的な性質すら未知のことが多くある。この逆操作である tuning の操作(構成法)を様々な文脈で確立することで、straightening map の全射性について調べ、新しい例を構成し、更にはそれによってパラメータ空間の構造を理解したい。

3. 研究の方法

(1) 反正則力学系の双曲成分の到達可能性について、放物型分岐と Misiurewicz パラメータに近づく双曲成分の列を適切にスケールリングすることで元の全体の族に収束すること、そのデコレーションの極限的挙動とこれらの収束の速さを見ることで調べる。特に Chebyshev 多項式に収束する列では到達可能であることが予想されていた。

(2) 放物型分岐理論によって, Misiurewicz 近似不可能である条件を Ecalle ベクトルを用いて記述することができたので, それを用いて分岐測度の台に含まれないが, 全ての臨界点が active であるような非自明な例が高次元のパラメータ空間に存在することを示す.

(3) 分岐測度を可視化し, できるだけ直感的に観察・操作できる方法を開発する. それを用いて観察することで新たな構造を発見する. また既知の結果をよりわかりやすく説明・提示する方法としても用いる.

(4) 擬等角手術の手法を更に発展させ, 新たなくりこみ可能な例を構成し, その性質を調べる. 更にはそれを用いてパラメータ空間の構造を調べ, straightening map の全射性や, パラメータ空間の相似性などの構造について調べる.

4. 研究成果

(1) 反正則 2 次多項式族の双曲成分で, 到達可能なものが無限個存在することを示した (稲生-川平). これは Eckmann-Epstein や McMullen によるスケール極限の結果や, 反発不動点の線形化座標, 無限遠点の Böttcher 座標, 放物型周期点の Fatou 座標, くりこみの多項式へのハイブリッド共役を与える擬等角写像の綿密に評価し, それらの収束速度を調べることで, 放物鉢のまわりの Julia 集合のデコレーションの増大速度と収束速度を比較する

ことで証明した. 到達不可能性についてはまだ厳密に証明された例は存在しないが, 数値的には周期が大きくなるとデコレーションがどんどん多く複雑になるので, 周期の十分高いものは到達不可能になりそうに見える. 従って, これはナイーブな予想とは逆の結果である. とはいえこれは Chebyshev パラメータ (Julia 集合が線分になる特殊な例である) に収束していることを本質的に使っており, 同じ手法で他のパラメータに収束する双曲成分では到達不可能性が示せるのではないかと考えている.

(2) Misiurewicz 近似できない, 従って分岐測度の台に含まれない放物的な 3 次多項式が存在することを示した. これは放物鉢に含まれる 2 つの臨界点の Fatou 座標における差 (位置関係) が一定の範囲にあるときに, 分岐した際に無限遠に逃げる臨界点を持つか, さもなければ Lavaurs 写像の位相の虚部が大きくなり, 結果として分岐した不動点の片方が吸引的になること示すことで得られた. Misiurewicz なパラメータではこのどちらも起き得ないからである. 分岐測度の台は臨界点が全て active であるパラメータ集合に含まれる. この二つの集合はかなり近いものと考えられているが, 後者の方が大きいことが知られている. この例はこの二つの差集合に入る非自明な例である.

(3) 4 次元的な対象を VR 機器を用いて可視化し, インタラクティブに回転して観察できるシステム Polyvision を構築した (松本, 小川 et al.). Polyvision では複数の射影を同時に表示し, そこから 1 つを選んで 3 次元的に回転することで 4 次元の回転を可能にした. 現在は, 例えばコントローラの平行移動を見えない 4 次元的な軸を含む平面での回転に割り当てるなど他にも複数の操作方法を実装し, それらの比較を行っている.

更にはタブレットやスマートフォンのカメラを用いた AR (拡張現実) 機能にも対応し, Hanson らのアプリを参考に画面のスイープで 4 次元的な回転を可能にした. VR 機器を必要とせず, 一般に普及している機器だけで観察できることは大きなメリットである.

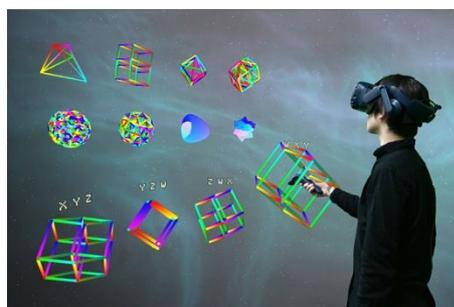


図 3 : Polyvision

上で開発したシステムを用いて操作・観察することで, 双二次多項式族の分岐測度の台に「穴」が開いていることを発見した. 穴を通過している複素直線を 1 つ特定し, それが数値的には分岐測度の台と交わらないことを観察した. Dujardin-Favre の到達定理に現れる到達写像は, 2 次元トーラスから双二次多項式族への写像になっているが, この不連続性 (トーラス面の「破れ」) によって現れる非自明な「穴」であることも数値的に観察した.

(4) 無限遠に逃げる臨界点と周期的な臨界点を持つ多項式に対し, 周期的な臨界点のまわりで擬等角手術を用いた tuning (くりこみの逆操作) を構成的に与え, straightening map が全

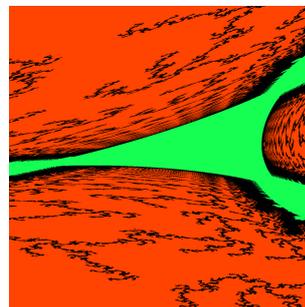


図 1 : 到達不可能な双曲成分

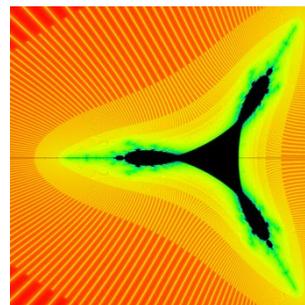


図 2 : 到達可能な双曲成分

射になることを示した(稲生-Wang) .有理関数でも同様の手法が使える例があることを発見しているが、一般的な理論を構築できるほどの知見はまだ得られていない .

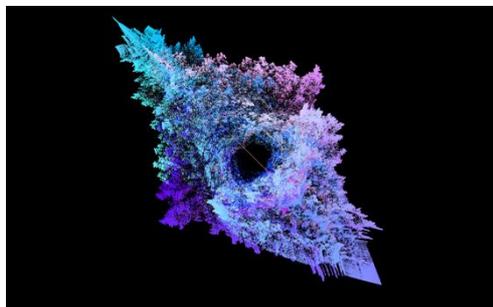


図 4 : 分岐測度の「穴」

擬等角手術を用いた satellite なくりこみを構成する手法 (稲生-Wang) を繰り返し用いることで、3 次のくりこみを無限個持つ多項式で、組み合わせ剛性が成り立たない例を構成した .Mandelbrot 集合に対しては組み合わせ剛性が成り立つと予想されているが、これは3次の「Mandelbrot 集合」で、(3次多項式全体で見たときに) 組み合わせ剛性が成り立たないものが存在することを示している .この例は近放物型くりこみ (稲生-宍倉) の意味でも無限回くりこみ可能であり、従って「毛深いCantor 集合」を不変集合に持つことがわかる .この不変集合のパラメータ依存性を調べることで、組み合わせ的に同値なパラメータ集合が曲線を含むことが示せるのではないかと予想している .

またこの擬等角手術による構成法と、Shen-Wang による primitive なくりこみの構成法を組み合わせることで、臨界点が重複を除いて 1 つしかない多項式によって定まる組み合わせのくりこみの straightening map は「ほとんど全射」になることを示した(稲生-Wang) . satellite なくりこみに対しては straightening map は全射にならないので、これは最良の結果である .他の場合については組み合わせ的な議論が複雑になるが、同じ方針で「ほとんど全射」になることが示せると考えており、Kiwi らと議論を進めている .

またこの擬等角手術による構成法と、Shen-Wang による primitive なくりこみの構成法を組み合わせることで、臨界点が重複を除いて 1 つしかない多項式によって定まる組み合わせのくりこみの straightening map は「ほとんど全射」になることを示した(稲生-Wang) . satellite なくりこみに対しては straightening map は全射にならないので、これは最良の結果である .他の場合については組み合わせ的な議論が複雑になるが、同じ方針で「ほとんど全射」になることが示せると考えており、Kiwi らと議論を進めている .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Inou Hiroyuki, Wang Yimin	4. 巻 33
2. 論文標題 Straightening Maps for Polynomials with One Bounded Critical Orbit	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-023-01369-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Inou Hiroyuki, Mukherjee Sabyasachi	4. 巻 2022
2. 論文標題 Discontinuity of Straightening in Anti-Holomorphic Dynamics: II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 6948 ~ 6990
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa365	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Inou Hiroyuki, Mukherjee Sabyasachi	4. 巻 374
2. 論文標題 Discontinuity of Straightening in Anti-holomorphic Dynamics: I	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 6445 ~ 6481
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8381	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matsumoto Keigo, Ogawa Nami, Inou Hiroyuki, Kaji Shizuo, Ishii Yutaka, Hirose Michitaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Polyvision: 4D Space Manipulation through Multiple Projections	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SA '19: SIGGRAPH Asia 2019 Emerging Technologies	6. 最初と最後の頁 36-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3355049.3360518	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Inou Hiroyuki, Nakane Shizuo	4. 巻 68
2. 論文標題 An implosion arising from saddle connection in 2D complex dynamics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 35 ~ 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iumj.2019.68.7577	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Inou Hiroyuki, Mukherjee Sabyasachi	4. 巻 378
2. 論文標題 On the support of the bifurcation measure of cubic polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01826-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 Visualization and a "hole" of the bifurcation measure for the biquadratic family
3. 学会等名 力学系の理論と諸分野への応用
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Visualization in complex dynamics in dimension two
3. 学会等名 VRを用いたインタラクティブな高次元認識 2
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Combinatorial classes of infinitely renormalizable cubic polynomials of adjacent type
3. 学会等名 Workshop on Holomorphic Dynamics - Parabolic Implosion (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 複素力学系のパラメータ空間の構造について
3. 学会等名 第65回函数論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Tuning and quasiconformal surgery
3. 学会等名 Complex Dynamics in the Tropics - Celebrating the 60th birthday of Carsten Lunde Petersen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 A hole of the support of the bifurcation measure for the biquadratic family
3. 学会等名 French-Japanese Workshop on Real and Complex Henon map (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 A compact family of renormalizable rational maps
3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系の諸相」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 An example of tunable rational map
3. 学会等名 RIMS共同研究「複素力学系理論の総合的研究」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 4次元の回転とVRにおける操作
3. 学会等名 九州大学 IMI 共同利用・短期共同研究「VRを用いたインタラクティブな高次元認識」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 An example of an infinitely renormalizable cubic polynomial and its combinatorial class
3. 学会等名 Holomorphic dynamics and related fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Matsumoto Keigo、Ogawa Nami、Inou Hiroyuki、Kaji Shizuo、Ishii Yutaka、Hirose Michitaka
2. 発表標題 Polyvision: 4D Space Manipulation through Multiple Projections
3. 学会等名 SIGGRAPH ASIA 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 An infinitely renormalizable cubic polynomial and its combinatorial class
3. 学会等名 Real and Complex Dynamics of Henon's maps (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 An infinitely renormalizable cubic polynomial and its combinatorial class
3. 学会等名 複素力学系の分岐と安定性の研究 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Miziurewicz approximation of maps with parabolic fixed point
3. 学会等名 Complex Dynamics in the Southern Hemisphere (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 稲生 啓行
2. 発表標題 On accessible hyperbolic components for the tricorn
3. 学会等名 複素力学系研究とその発展 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Topological aspects of the tricorn
3. 学会等名 Topological methods in dynamics and related topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Topology of the tricorn
3. 学会等名 復旦大学 上海数学中心 Dynamical Systems Seminar (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Inou
2. 発表標題 Complex dynamics and visualization
3. 学会等名 University of Auckland Applied Maths Seminar
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
Around the Mandelbrot set: A conference celebrating the 60th birthday of Mitsuhiro Shishikura	2024年 ~ 2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	上海師範大学			
中国	上海数学中心			
インド	Tata Institute of Fundamental Research			
チリ	Pontificia Universidad Catolica de Chile			
フランス	Universite Paul Sabatier			
米国	Stony Brook University			