

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03374

研究課題名（和文）楕円関数を用いた非線形偏微分方程式の解の記述および関連する問題の研究

研究課題名（英文）Study on representation for solutions to PDE by elliptic functions and the related problems

研究代表者

若狭 徹 (Waka, Tohru)

九州工業大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：20454069

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式に由来する非線形楕円型方程式あるいはその線形化固有値問題などについて、楕円関数やシューティング法を用いて解を具体的に構成する研究、あるいは微小拡散係数に関する詳細な漸近公式を得る研究に取り組んだ。線形化固有値問題は、反応拡散方程式の力学系において定常解の安定性や不安定性の程度を規定する。特定の非線形項を持つ単独方程式の場合については、宮本安人教授（東京大学）らと共同研究により上記目的を達成し2編の共著論文を発表した。また、あるMEMSデバイスを記述する非線形楕円型方程式の解構造についてJong-Sheng Guo教授（淡江大学）ら台湾グループとの共同研究により共著論文を発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

反応拡散系などの非線形微分方程式について、力学系的観点から解構造の様子を記述することは一般的に困難な問題であり、この方面の研究の多くは数値計算によるアプローチが主導的である。一方、2000年代初頭の小杉・森田・四ツ谷らの研究以降、非線形微分方程式の解を楕円関数を用いて初等的に記述する方法の有用性が再指摘されている。本研究課題では、四ツ谷氏と申請者の先行研究により継承、整備された楕円関数の解析技法をもとに、反応拡散系の線形化固有値問題の解の記述や微小拡散係数に関する漸近公式に応用した。これはさらなる非線形微分方程式の解析やあるいは背後にあるLameの微分方程式の理解への有用性が期待される。

研究成果の概要（英文）：The purpose of the research project is the mathematical analysis related with the theory of reaction diffusion equations (PDEs of parabolic type). In particular, we have mainly used the elliptic functions and the shooting method to give expressions of the steady-state solutions of the problems of the parabolic PDEs. The linearized eigenvalue problems provide the stability/instability of the steady-state in the framework of the dynamical systems. In the case of the single equations with particular nonlinear terms, have been investigated by the jointwork with Prof. Yasuhito Miyamoto et al. The analytical results for the asymptotics on every eigenpairs in terms of the small diffusion coefficient, have been published as two papers in the international journals. A boundary value problem for the elliptic PDE describing a MEMS device, has been investigated by the jointwork with Prof. Jong-Sheng Guo et al. The global bifurcation result on has been published in the international journal.

研究分野：数理解析学

キーワード：非線形偏微分方程式 楕円関数 反応拡散系 大域的分岐問題 線形化固有値問題 Laméの微分方程式 漸近公式 第3種楕円積分

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式による数理モデルが与えられたときに、解の分岐構造、特に大域的分岐問題として個々の分岐構造を含む解集合全体の様子を明らかにすることは数理解析の観点から重要かつ魅力的な問題である。しかし解集合の全体は、通常ある種のネットワークを形成しており、その全体構造をひとくくりに記述することは一般的に困難な問題である。一方、大域的分岐現象の研究において数値計算によるアプローチは強力かつ汎用的であり、この方面の研究の多くは現在数値計算(場合によっては計算機援用解析)によるアプローチが主導的である。

2000年代以降、非局所項を含む非線形微分方程式の境界値問題の大域的分岐問題について、理論的アプローチによる研究の進展がみられた。四ツ谷晶二氏(龍谷大学名誉教授)に主導されるいくつかの研究では、楕円関数による解の直接的記述を積極的に利用することによって、複素 Ginzburg-Landau 方程式(2005)や非局所 Allen-Cahn 方程式(2017)などについて大域的分岐構造が得られている。これらの問題に共通にみられる特徴として、Chafee-Infante による古典的問題と異なり、自明解からの非自明解の1次分岐から、さらに2次分岐が起こることである。

解析的アプローチにより2次分岐を具体的に追跡することは一般には困難であり、一連の研究は非線形問題の解構造問題の解析において楕円関数の有用性が示される具体的な例を与えている。

### 2. 研究の目的

本研究課題の第一の目的は、多変数反応拡散系と非線形分散型のクラスに属する代表的な偏微分方程式モデルを対象に、大域的分岐問題について解析的な成果を挙げることにある。第二の目的は、(申請者らの先行研究を含め)得られた分岐解について、解に付随する線形化作用素、およびこれに対する固有値・固有関数の性質の調査を行い有用な情報を得ることである。

また、本研究課題の着想に至る経緯において、先行研究における線形化固有値問題の研究の背後には、Lame の微分方程式が系統的に現れることがわかってきた。これは付随する線形化作用素の特性を完全に決定する際に、重要な指針となる。この事実を受け、可積分系理論の観点に立ち、逆にLame の微分方程式と非線形問題との関連を調べる。

### 3. 研究の方法

申請者および四ツ谷氏による先行研究(2008,2010,2015,2016)では、楕円関数による解表示をさまざまな非線形項に対する Chafee-Infante 型問題の線形化固有値問題に適用し、全ての固有値の特徴づけ、固有関数の表示式および固有値・固有関数の微小拡散係数に関する漸近公式を得ることに成功している。これらの手法の一部については応用数学勉強会の報告集(2017)にまとめられているが、これをさらに発展させ線形化固有値問題をはじめとするさまざまな非線形偏微分方程式の問題に応用する。一方、楕円関数による解表示は汎用的な問題に適用することは難しい。したがってシューティング法や特異極限による縮約法などの従来手法を併用し、分岐解析や線形化固有値問題の研究に応用する。

### 4. 研究成果

以下では反応拡散方程式(放物型)、その定常問題である非線形微分方程式(楕円型)は全て空間次元1の場合を考えるものとする。

#### (1) 楕円関数を用いた線形化固有値問題の解の表現、およびLame の微分方程式との関連

非局所項を含む非線形微分方程式や、線形化固有値問題について楕円関数による直接的な解表示を与える際には完全楕円積分、特に第3種完全楕円積分の解析が重要となる。これについては応用数学勉強会の報告集(2017)に記載されているが、その解析の際に現れる重要な関数として、変形第3種楕円積分を定義しその簡単な性質をとりまとめた。宮本安人教授(東京大学)、竹村春希氏、会沢修也氏(ともに東京大学大学院数理科学研究科)らの共同研究では、双安定型非線形項の場合に付随する線形化固有値問題に対する申請者および四ツ谷氏の共著論文の手法をもとに、スカラーフィールド型(指数  $p=3$ )およびsinh-Poisson 型の非線形項の場合に付随する線形化固有値問題について研究を行った。それぞれの問題について、全ての固有値が変形第3種楕円積分を用いて表される超越方程式の解として決定されること、全ての固有関数が楕円関数による表示式として与えられることを明確にしている。さらに主結果として、固有値の微小拡散係数に関する漸近公式を得ており、研究成果は2編の共著論文として出版されている(2023,2023)。スカラーフィールド型の非線形問題では、非線形項に含まれる指数が  $p=2$  の場合が有名であるがこの場合の解析は容易ではなく、今後の課題である。また、線形化固有値問題とLame 方程式との関係について宮本氏との共同研究に着手した。これに関しても今後の課題となる。

(2) シューティング法による楕円型偏微分方程式の分岐問題

2019年に Jong-Sheng Guo 教授(台湾・淡江大学)との共同研究に着手し,ある MEMS デバイスに関連する非線形境界値問題の解構造の研究を行った。ここでは共同研究の土台に相当する, Time-map 法による解析の初歩について計算を行い, その後の台湾の 3 名の研究者らの研究進展によって, 数値計算や力学系理論から推測される解構造およびその安定性の結果が得られた。共同研究の成果については, 1 編の共著論文として出版されている(2020)。また, 高次元の楕円型偏微分方程式の安定解の形状問題を背景として, グラフ構造および端点での不連続境界条件を課した Chafee-Infante 問題について菅徹准教授(大阪公立大学)との研究を行った。菅氏の先行研究(2020)では, 2 線分をつなぐ最も簡単なネットワーク構造上で安定解を含む 2 次分岐が示されている。当問題では楕円関数による解表示が不連続境界条件のために機能せず, 菅氏の論文において用いられたシューティング法をもとに 3 線分を格子状に並べたグラフ上の問題に取り組んだ。共同研究では奇関数解に相当する分岐解の枝を大域的に得ることに成功しているが, 論文投稿に向けて改善点があり今後当面の課題の一つとして取り組む必要がある。

(3) 特異極限縮約における一般反応拡散系の線形化固有値問題の漸近公式

申請者と四ツ谷氏の先行研究で得られた固有値・固有関数の漸近公式については, 一般の反応拡散系に対して普遍的に成立すると見込まれるものが含まれる。これを一般的な反応拡散系について, 力学系の一般論の枠組みにて議論するために栄伸一郎教授(北海道大学 城西大学)および島谷晴基氏(北海道大学)との共同研究を行った。反応拡散系の縮約については栄氏は第一人者であり, 双安定非線形項に現れるフロント解, スカラーフィールド型非線形項に現れるパルス解のそれぞれに付随する線形化固有値問題について, 臨界固有値に含まれる係数が縮約方程式の線形化固有値問題から現れる係数と一致することが示された。当研究テーマについては, 特に申請者がコロナ禍の影響により研究活動に大きな支障を受けたため論文投稿が遅れている。早急な論文投稿が今後の課題である。

(4) Gierer-Meinhardt シャドウ系の大域的分岐構造の研究

スカラーフィールド型方程式は形態形成モデルの一つである Gierer-Meinhardt モデルと密接な関わりがあり, 宮本氏による一連の先行研究(2005-2007, 2013)をベースとして兼子裕大講師(関東学院大学)との共同研究に取り組んだ。先行研究結果から Gierer-Meinhardt シャドウ系の大域的分岐構造および安定性解析の結果をまとめ, 加えてパルス解の微小拡散系スコープに関する漸近公式を導いた。これについて 2024 年 5 月に共著論文が発表された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Guo Jong-Sheng, Huang Bo-Chih, Wakasa Tohru, Wang Chi-Jen, Yu Cherng-Yih	4. 巻 269
2. 論文標題 The structure of stationary solutions to a micro-electro mechanical system with fringing field	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7676 ~ 7704
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.05.041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Y. Miyamoto Y., H. Takemura, T. Wakasa	4. 巻 1
2. 論文標題 Asymptotic formulas of the eigenvalues for the linearization of the scalar field equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2023.95	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 S. Aizawa, Y. Miyamoto, T. Wakasa	4. 巻 9
2. 論文標題 Asymptotic formulas of the eigenvalues for the linearization of a one-dimensional sinh-Poisson equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Elliptic and Parabolic Equations	6. 最初と最後の頁 1043-1070
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41808-023-00233-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Y. Kaneko, Y. Miyamoto, T. Wakasa	4. 巻 37
2. 論文標題 Stability and bifurcation diagram for a shadow Gierer-Meinhardt system in one spatial dimension	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1-27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ad3596	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計17件(うち招待講演 14件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 兼子裕大、宮本安人、若狭 徹
2. 発表標題 Stability and bifurcation diagram for a shadow Gierer-Meinhardt system in one spatial dimension
3. 学会等名 日本数学会2024年秋季総合分科会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tohru Wakasa
2. 発表標題 Linearized eigenvalue problems, Lamé equations, and modified elliptic integrals of the third kind
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tohru Wakasa
2. 発表標題 Stability and Bifurcation for 1-dimensional Gierer-Meinhardt shadow system
3. 学会等名 第7回 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 竹村春希、宮本安人、若狭 徹
2. 発表標題 スカラーフィールド方程式の線形化問題における固有値の明示的表示
3. 学会等名 日本数学会2024年年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 1次元線形化固有値問題、第3種楕円積分とLane方程式
3. 学会等名 さいたま数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 ある空間1次元MEMSモデルの定常解とその安定性
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 ある空間1次元MEMSモデルの定常解について
3. 学会等名 非線型現象のシミュレーションと解析ミニ研究集会2022（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 fringing fieldを考慮した1次元MEMSモデルの定常解構造
3. 学会等名 室蘭工大PDE研究会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 若狭 徹、宮本 安人、竹村 春希、会沢 修也
2. 発表標題 線形化固有値問題, 第3種楕円積分と Laméの微分方程式
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「精密解析による非線形問題の新展開」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 fringing fieldを考慮したMEMSモデルの定常解と安定性
3. 学会等名 第11回室蘭非線形数理研究会(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 空間1次元MEMSモデルにおける定常解と安定性解析
3. 学会等名 第2かオンライン放物型偏微分方程式ワークショップ(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Wakasa
2. 発表標題 Limit Classification on Eigenfunctions for 1-Dimensional Reaction-Diffusion System
3. 学会等名 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 反応拡散系と線形化固有値問題
3. 学会等名 松江数理生物学・現象数理学ワークショップ(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 Characterization on eigenvalues and eigenfunctions for 1-dimensional linearized scalar field equations
3. 学会等名 12-th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 Limit Classification on Eigenfunctions for 1-Dimensional Reaction-Diffusion System
3. 学会等名 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 楢田積分計算による線形化固有値問題の解析とその応用
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 若狭 徹
2. 発表標題 1次元スカラーフィールド方程式の線形化固有値問題
3. 学会等名 Nonlinear Evolutionary PDEs and their Equilibrium States II (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 RIMS共同研究(公開型)「常微分方程式の定性的理論と数値モデル研究への応用」	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関