

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03376

研究課題名（和文）ヒストリー的挙動を許容する可微分力学系の創発性の研究

研究課題名（英文）Emergence of differentiable dynamical systems with historic behavior

研究代表者

相馬 輝彦（Soma, Teruhiko）

早稲田大学・産業経営研究所・その他（招聘研究員）

研究者番号：50154688

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、微分同相写像の創発性である。特に、2次元多様体上の微分同相写像でルベグ測度が正である多様体の部分集合に対し、その元を起点とする前方軌道の創発性が Sup-P となる族を見つけることにあった。この研究はほぼ当初の予定通り完成し、国際専門誌から発表することができた。この研究を通じて、写像それ自身より軌道に対応する2進コード本質的であることが分かり、上記の結果は3次元以上の多様体上の微分同相写像でも成り立つことが証明できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、純粹に数学的な見地からの研究であるが、ある種の運動している物体の軌道を統計的に推測することにも関連している。それゆえ、応用数理的または物理学的検知からも有用な研究といえる。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research project is to study emergence of diffeomorphisms. In particular, for diffeomorphisms on two-dimensional manifolds and some subsets of positive Lebesgue measure, our goal was to find a family of forward orbit based at points of the subset the emergency of which is Sup-P. The original plan has almost achieved and the result was published in an international journal. Through this research, it was found that the binary code corresponding to the orbit is more essential than diffeomorphism itself. So, we could prove that the above result holds for diffeomorphisms on manifolds of dimension 3 or more.

研究分野：Dynamical systems

キーワード：diffeomorphism Emergence historic behavior

様式 C-19, F-19-1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

X を距離空間とし, $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする. $x \in X$ を起点とする f による前方軌道 $O_f^+(x)$ がヒストリーの挙動 (historic behavior) を持つとは, Birkhoff 平均

$$\delta_{x,f}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \quad (1.1)$$

が弱位相の意味で極限値を持たないことをいう. ただし, $\delta_{f^i(x)}$ は 1 点集合 $\{f^i(x)\}$ を台とする X 上の Dirac 測度とする. ヒストリーの挙動の概念は, Ruelle [R01] によって導入されたものである. X がコンパクト距離空間のとき, Birkhoff のエルゴード定理より, X 上に f -不変な有界測度 μ が存在するならば, その測度に関し, X のほとんど全ての点 x の前方軌道はヒストリーの挙動を持たないことがいえる. Birkhoff の定理は, 不変測度の立場からは決定的な結果といえる. しかし, 不変測度は統計学的または物理学的な見地からは必ずしも自然な測度とはいえない. 特に, X が多様体のような (局所的に) ユークリッド空間の構造を持つ場合, Lebesgue 測度が最も自然な測度である. このような批判的な観点から, F. Takens は次の問題を提案した.

Takens の最終問題 [T08]. 多様体 M 上の微分同相写像の持続的クラス \mathcal{W} で, ヒストリーの挙動をもつ要素からなるものは存在するのか?

ここで, \mathcal{W} が持続的クラス (persistent class) であるとは, \mathcal{W} が微分同相空間 $\text{Diff}^r(M)$ ($r \geq 1$) の空でない開集合の稠密な部分集合になっていることをいう. また, $f \in \mathcal{W}$ がヒストリーの挙動をもつとは, M の Lebesgue 測度正の部分集合 D_f で, 任意の $x \in D_f$ に対し, $O_f^+(x)$ がヒストリーの挙動をもつものが存在することをいう. 次で説明するように, 本研究代表者は研究分担者 (桐木紳氏) との共同研究 (Kiriki-Soma [KS17]) で, 2 次元微分同相写像の持続的クラス \mathcal{W} を構成し, Takens の最終問題に対する解答をえた. さらにこの論文で構成した 2 次元微分同相写像を使って, 非自明な遊走領域の存在に関する Colli-Vargas の予想 [CV01] も肯定的に解決できた.

2. 研究の目的

[KS17] でえられた持続的クラス \mathcal{W} の元 f に関するヒストリーの挙動の問題は, 力学系における新たな研究対象であることが認識された. しかし, ヒストリーの挙動を持つというだけでは, Birkhoff 平均 (1.1) が収束しないということを示すただけであり, その集積点がどのような特徴を持つのかについては明らかになっていない. 本研究の目的は, $O_f^+(x)$ がヒストリーの挙動をもつとき, すなわち Birkhoff 平均 $\delta_{x,f}^n$ が極限をもたないとき, 点列 $\{\delta_{x,f}^n\}$ が M 上の確率測度空間 $\mathcal{P}(M)$ 内でどのような振る舞いするかを解明することにあつた. この課題に対応するため本研究では, P. Berger [B17] によって提起された創発性の概念を利用した.

M 上の確率測度空間 $\mathcal{P}(M)$ 上で定義された (第 1) Wasserstein 計量を d_W とする. この計量に関し, $\mathcal{P}(M)$ はコンパクトである. $\varepsilon > 0$ を任意に与える. このとき, $f: M \rightarrow M$ に関するスケール ε の創発性 (Emergence) とは,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_M \min_{1 \leq i \leq N} d_W(\delta_{x,f}^n, \mu_i) d\text{Lip} \leq \varepsilon$$

をみたく $\mathcal{P}(M)$ の要素 μ_1, \dots, μ_N の最小個数 N のことであり, これを $E(f, \varepsilon)$ と表す. 特に, $E(f, \varepsilon) \neq O(1)_{\varepsilon \rightarrow 0}$ であり, さらにある $k > 1$ に対し $E(f, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-k})$ のとき, f の創発性は \mathcal{P} であるという. より強く, $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log E(f, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} = \infty$ が成り立つとき, f の創発性は Sup-P である

という．定義より， f の創発性が P のとき， f はヒストリー的挙動をもつことが分かる．創発性が Sup-P であるとき，すなわち超多項式的なとき，現在のコンピュータでは $\{\delta_{x,f}^n\}$ の挙動を推測することはできないことが証明されている．本研究は， \mathcal{W} の稠密な部分集合 \mathcal{W}' で，任意の元 $f \in \mathcal{W}'$ が創発性 Sup-P をもつものを構成することを研究の主目標とした．

3. 研究の方法

[KS17] でえられた持続的クラス \mathcal{W} の任意の元 f は馬蹄型不変集合 Λ_f をもつ．2 進コード $1, 2, 12, 21, 112, \dots$ に対応する f の周期点を順に $\hat{p}, p, p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)} \dots$ とおく．必要ならば， f を改良することにより，遊走領域 D_f の任意の点 x に対し， $\{\delta_{x,f}^n\}$ の集積点集合が $\pi(\overline{p, p^{(1)}})$ と一致するようにできる．ただし， $\overline{p, p^{(1)}}$ は $\mathcal{P}(M)$ 内の線分 $\overline{p, p^{(1)}} = \{(1-t)p + tp^{(1)}; 0 \leq t \leq 1\}$ であり， $\pi: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ は，十分大きな自然数の定数 z_0 に対し $\pi(\mu) = \frac{z_0 \delta_{\hat{p}} + \mu}{z_0 + 1}$ で定義される射影である．これができるれば， φ の創発性が P であることが証明できる．次に，創発性が Sup-P であるような持続的写像族の構成について考える．創発性が P の場合と類似の議論が成り立つことが想定されるが，写像に関しより精密な構成が必要となる．P のときは， $\mathcal{P}(M)$ 内の線分 $\overline{p, p^{(1)}}$ を利用したが，今度は任意の $L \in \mathbb{N}$ に対し， $\mathcal{P}(M)$ 内の L -単体を利用する． Δ^L を $p, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(L)}$ を頂点としてもつ $\mathcal{P}(M)$ 内の L -単体とする．このとき，

$$\pi(\overline{p, p^{(1)}}) = \pi(\Delta^1) \subset \pi(\Delta^2) \subset \dots \subset \pi(\Delta^L) \subset \dots \subset \pi(\Delta^\infty)$$

が成り立つ． f の構成を精密化し，前方軌道 $\{\delta_{x,f}^n\}$ の集積点集合が $\mathcal{P}(M)$ 内の無限次元単体 $\pi(\Delta^\infty)$ に一致することを示す．このとき， f が創発性 Sup-P をもつことが証明される．

4. 研究成果

Covid 19 の影響で，研究は計画通り進まず遅延したが，その成果自体は満足できるものといえる．まず，本研究代表者と研究分担者（桐木紳，中野雄史）は，上記の計画に沿って研究を進め，次の結果を得た．

定理 1. M を閉曲面とし， r を $2 \leq r < \infty$ みたす整数とする．このとき， $\text{Diff}^r(M)$ の Newhouse 開集合の稠密な部分集合 \mathcal{D} で，任意の $f \in \mathcal{D}$ に対し，

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log E_{\text{Leb}}(\varepsilon, f)}{-\log \varepsilon} = \infty$$

をみたすものが存在する．

この結果は，2022 年に「Advances in Mathematics (vol. 400)」から発表された．さらに，定理 1 を Berger–Biebler [BB21] の結果と組み合わせることにより，次の系が得られた．

系 2. $f \in \mathcal{D}$ は遊走領域 D で持ち，任意の $x \in D$ に対し次が成り立つ．

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \log E_x(\varepsilon, f)}{-\log \varepsilon} \geq \dim_u(\Lambda) > 0.$$

ただし， $\dim_u(\Lambda)$ は， Λ の box-counting 次元を表す．

系 2 で与えられた創発性は，stretched exponential emergence と呼ばれているものであり，Sup-P よりもさらに強い創発性である．

これらの研究を通じ，定理 1, 系 2 の証明で本質的に重要なのは，微分同相写像そのものではなく，ある種の 2 進コードと，そのコードに対応する Λ_f の元 x の前方軌道 $O_f^+(x)$ を近似する縮小

遊走領域の存在であることが分かった．特に，これらの微分同相写像は2次元という仮定は本質的でないことも明らかになった．そこで本研究代表者と研究分担者は，野性的ブレンダー型不変集合を持つ3次元以上の微分同相写像で同様の性質を持つものが成できないか調べることにした．結果として，次の定理が得られた．

定理 3. 野性的ブレンダー型不変集合 Λ_f を持つ3次元微分同相写像 f で，次の条件 (*) をみたすものが存在する．

(*) \underline{v} を過半数条件をみたす任意の2進コードとする．このとき， f を任意に近似するある微分同相写像 g は，任意の $y \in D_g$ に対し， $\lim_{n \rightarrow \infty} d_W(\delta_{y,g}^n, \delta_{x_g,g}^n) = 0$ をみたすような縮小遊走領域 D_g をもつ．ただし， x_g は \underline{v} に対応する Λ_g の元とする．

この結果は，2023年に「Nonlinearity (vol. 36)」から発表された．これらの研究を通じ，軌道を統計的に近似という概念が得られた．それは，与えられた微分同相写像と2進コードに対し，この写像を任意に近似する微分同相写像を使い，そのコードに対応する前方軌道のBirkhoff平均を統計的に表現することである．この概念を多様性 (pluripotency) といい，厳密には次のように定義される．

定義 4. f を馬蹄型不変集合 Λ_f を持つ M 上の微分同相写像とし， Λ'_f を Λ_f の部分集合とする．このとき， f が Λ'_f に対し多樣的である (pluripotent) とは，任意の $x \in \Lambda'_f$ に対し， f を任意に C^r 近似する $g \in \text{Diff}^r(M)$ と Lebesgue 測度正の $D_g \subset M$ が存在し，次の条件 (*) をみたすことをいう．

(*) 任意の $y \in D_g$ に対し，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_W(\delta_{y,g}^n, \delta_{x_g,g}^n) = 0.$$

ただし， $x_g \in \Lambda_g$ は x の連続点 (continuation) とする．さらに，このような g と D_g に対し，次が成り立つとき， f は Λ'_f に対し強多樣的である (strongly pluripotent) であるという．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{y \in D_g} \text{dist}(g^i(y), g^i(x_g)) = 0.$$

多様性の研究は，本研究に継続するものである．この研究は既に始まっており，本研究代表者，分担者は次の2つの論文を完成させ現在投稿中である．

1. S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma, Pluripotency of wandering dynamics, arXiv:2404.00337
2. S. Kiriki, X. Li, Y. Nakano, T. Soma and E. Vargas, Takens' Last Problem and strong pluripotency, arXiv:2404.17932

参考文献

- [B17] P. Berger, Emergence and non-typicality of the finiteness of the attractors in many topologies, Proc. Steklov Inst. Math. **297** (2017) 1–27.
- [BB21] P. Berger and J. Bochi, On emergence and complexity of ergodic decompositions, Adv. Math. **390** (2021), no. 107904.
- [CV01] E. Colli and E. Vargas, Non-trivial wandering domains and homoclinic bifurcations, Ergod. Th. Dynam. Sys. **21** (2001) 1657–1681.
- [KS17] S. Kiriki and T. Soma, Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains, Advances in Math. **306** (2017) 524–588.
- [R01] D. Ruelle, Historical behaviour in smooth dynamical systems, in Global Analysis of Dynamical Systems (eds. H. W. Broer et al), Inst. Phys., Bristol, 2001, 63–66.
- [T08] F. Takens, Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages, Nonlinearity, **21** (2008) no. 3, T33–T36.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Y. Nakano Yushi, T. Soma, K. Yamamoto | 4. 巻 43 |
| 2. 論文標題 Observable Lyapunov irregular sets for planar piecewise expanding maps | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 2737 ~ 2755 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2023027 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Kiriki Shin, Li Xiaolong, Nakano Yushi, Soma Teruhiko | 4. 巻 391 |
| 2. 論文標題 Abundance of Observable Lyapunov Irregular Sets | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 1241 ~ 1269 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04337-6 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Kiriki Shin, Nakano Yushi, Soma Teruhiko | 4. 巻 400 |
| 2. 論文標題 Emergence via non-existence of averages | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Advances in Mathematics | 6. 最初と最後の頁 108254 ~ 108254 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108254 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|--------------------------|
| 1. 著者名 Pablo Barrientos, Shin Kiriki, Yushi Nakano, Artem Raibekas and Teruhiko Soma | 4. 巻 148 |
| 2. 論文標題 Historic behavior in nonhyperbolic homoclinic classes | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc. | 6. 最初と最後の頁 1195--1206 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14809 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma | 4. 巻 32 |
| 2. 論文標題 Historic behaviour for nonautonomous contraction mappings | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Nonlinearity | 6. 最初と最後の頁 1111-1124 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aaf253 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 S. Hashimoto, S. Kiriki and T. Soma | 4. 巻 38 |
| 2. 論文標題 Moduli of 3-dimensional diffeomorphisms with saddle-foci | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 10.3934/dcds.2018220 | 6. 最初と最後の頁 5021-5037 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2018220 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| https://trhksoma.fpark.tmu.ac.jp/ |
|---|

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|---|------------------------------------|----|
| 研究分担者 | 桐木 紳 (Kiriki Shin) (50277232) | 東海大学・理学部・教授 (32644) | |

6. 研究組織（つづき）

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------------------|---|-------------------------------------|----|
| 研究 分 担 者 | 中野 雄史 (Nakano Yushi) (50778313) | 東海大学・理学部・准教授 (32644) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
| | |