

令和 5 年 6 月 7 日現在

機関番号：12611

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03378

研究課題名（和文）アクセサリパラメーターに関連する微分方程式と差分方程式

研究課題名（英文）Differential equations and difference equations associated with accessory parameters

研究代表者

竹村 剛一（TAKEMURA, Kouichi）

お茶の水女子大学・基幹研究院・教授

研究者番号：10326069

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ホインの微分方程式やパウルヴェ方程式を中心としたアクセサリパラメーターに関連する微分方程式や差分方程式が主要な研究対象であったが、とくに q 差分方程式に対して思いがけない結果を得た。 q ホイン方程式やこれの変異版について、対称性や q パウルヴェ方程式との関係について結果を得た。一方で q 超幾何方程式の変異版の導入や解の探求も行った。 q ホイン方程式などの研究が q ミドルコンボリューションに関する研究とつながったことが、当初予期していなかった成果となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何関数は特殊関数の代表例で重要な関数であるが、これは超幾何微分方程式の解として特徴付けられる。これは3つの確定特異点をもつことで特徴付けられ、アクセサリパラメーターをもたずにリジッドである。ホインの微分方程式は4つの確定特異点をもつことで特徴付けられアクセサリパラメーターをもち、理論物理でも時々現れる。本研究では超幾何微分方程式やホインの微分方程式の q 差分化に関して成果が得られ、数学的構造について理解が深まった。特殊関数への応用が期待でき、さらには本研究の成果が宇宙論を含む理論物理に波及する可能性がある。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we investigated differential equations and difference equations associated with accessory parameters. An important example of the differential equations having an accessory parameter is Heun's differential equation. The q -Heun equation is a q -difference analogue of Heun's differential equation. We obtained several results on the q -Heun equation and its variants from the perspective of the symmetry and the q -Painleve equations. We introduced the variants of the q -hypergeometric equation, and we investigated their solutions. The results between the q -middle convolution and the q -Heun equation were beyond our expectations.

研究分野：数学、解析学、数理物理、可積分系

キーワード：アクセサリパラメーター 方程式 パウルヴェ方程式 q ホイン方程式 ホインの微分方程式 変異版 q 超幾何方程式 q パウルヴェ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

超幾何関数は特殊関数における重要な例となっており、物理や数学においてさまざまな場面で登場するものである。超幾何関数は超幾何微分方程式の解として特徴付けられる。超幾何微分方程式においては解の積分表示など多大な結果が知られているが、この理由として超幾何微分方程式はアクセサリーパラメーターをもたないことが挙げられる。

一方、ホインの微分方程式はアクセサリーパラメーターをもっていて、超幾何微分方程式に比べて解明度が低い。パウルヴェ方程式についても、アクセサリーパラメーターとの関連が知られている。

また、超幾何関数の q 変形として q 超幾何関数 (もしくは basic hypergeometric function) が古来より知られており、さまざまな研究がなされてきた。ホインの微分方程式においても q 変形が Hahn により 1971 年の論文で発見されていたが、しばらく忘れられていた。ところが、報告者 (2017, J. Int. Sys.) により Ruijsenaars 模型の退化を調べる過程で再発見された。

研究開始当初は、とくにアクセサリーパラメーターをもつ q 差分方程式については発展の余地が大きく残されていた。

2. 研究の目的

本研究では、ホインの微分方程式やパウルヴェ方程式を中心としたアクセサリーパラメーターに関連する微分方程式や差分方程式について探求する。

ホインの微分方程式やこれの拡張については、パウルヴェ方程式と関連する研究や対称性に注目した研究などを行う。ホインの微分方程式の q 差分化 (q ホイン方程式) においては解明すべきことが多く、方程式の退化の様子や特殊解の探求などが課題である。 q パウルヴェ方程式との関係も肝要である。

超幾何微分方程式に代表される特殊関数を、アクセサリーパラメーターに関連する微分方程式の解などに広げていき、物理の模型などへの応用の素地を作っていきたい。

3. 研究の方法

報告者は (2017, J. Int. Sys.) においてパウルヴェ-ホイン対応の q 変形として q パウルヴェ方程式と q ホイン方程式との関係を調べたが、これについて研究を進展させて対称性などを元に双方の方程式の解の解析にも応用させたい。 q 差分方程式の研究においては、複素変数の微分方程式の確定特異点における級数解の方法を適切に用いることが考えられる。また、 q パウルヴェ方程式の研究で注目されてきたアフィンワイル群対称性に注目して q ホイン方程式などに適用することも考えられる。

q ミドルコンボリューションは坂井氏および山口氏 (2017, IMRN) によりミドルコンボリューションの q 変形として導入されており、 q 変形された積分であるジャクソン積分との関係も調べられていた。これを用いることで q 差分方程式の解自体や対称性について調べていく。

4. 研究成果

2018 年度には、おもに q ホイン方程式について結果が得られた。報告者は (2017, J. Int. Sys.) において q ホイン方程式を 2 通りの方法で導き出したが、その 1 つは Ruijsenaars-van Diejen 作用素から 4 回の退化によって導出するものである。2018 年度に出版された論文「On q -deformations of Heun equation」では、この退化において 2 回退化のものとは 3 回退化のものについて、確定特異点や見かけの特異点の理論を差分化したものからの特徴付けを行った。4 回退化の q ホイン方程式においては、 $q \rightarrow 1$ の極限で 4 点 $\{0, 1, t, \}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式、すなわち標準形でのホインの微分方程式が得られるが、3 回退化においては $q \rightarrow 1$ の極限で無限遠点が特異点でない 4 点 $\{0, t_1, t_2, t_3\}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式が現れること、および 2 回退化においては $q \rightarrow 1$ の極限で原点および無限遠点が特異点でない 4 点 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式が現れることがわかった。 q 差分方程式においては微分方程式の場合とは違って原点および無限遠点が特別な特異点となると考えられるが、このことが退化の構造と整合的であることがわかった。他に、中央大学大学院博士前期課程を修了した小嶋健太郎氏と佐藤司氏との共同研究とそれを引き継いだ研究が進展した。

2019 年度には、小嶋氏と佐藤氏との前述の研究成果が学術雑誌に掲載された。論文「Polynomial solutions of q -Heun equation and ultradiscrete limit」において、 q ホイン方程式の多項式解について、既に知られているホインの微分方程式の多項式解の理論と同様の手法が有効であることを示した。さらに、その解のより詳しい挙動について、 q を 0 に極限をとるという超離散極限を用いて解析した。また、当時中央大学大学院博士前期課程に在籍していた

波多野修也氏、松縄竜弥氏、佐藤智輝氏と共著で「Variants of q -hypergeometric equation」という題の論文原稿を作成し、日本数学会 2019 年度秋季総合分科会にて研究発表を行った。この研究では q 差分超幾何関数のみならず q 差分超幾何方程式に関連するものとして、 q ホイン方程式の視点から変異版 q 差分超幾何方程式を発見した。そして、その方程式の具体的な解をいくつか構成した。

2020 年度には、前述の論文原稿に引き続いて松縄氏、佐藤氏と共著で「Variants of confluent q -hypergeometric equations」という題の論文原稿を作成した。また、当時中央大学大学院博士前期課程に在籍していた佐々木懂子氏、高木駿氏と q パンルヴェ方程式と q ホイン方程式についての研究を行った。その成果の一部として、日本数学会 2021 年度年会（2021 年 3 月開催）にて 2 件の研究発表を行った。この研究では、 q パンルヴェ方程式の初期値空間を得るためのブローアップの計算を、 q パンルヴェ方程式に Lax Pair の一部として関係する線形 q 差分方程式にも適用し、結果として q ホイン方程式やこれの変異版が得られることを示した。また、 q ミドルコンボリューションの理論を q パンルヴェ方程式に関係する線形 q 差分方程式にも適用できることを示し、 q ミドルコンボリューションから引き起こされる対称性を q パンルヴェ方程式での拡大アフィンワイル群と関係付けることに成功した。

2021 年度には、前述の佐々木氏、高木氏との共同研究の結果として、 q パンルヴェ方程式の初期値空間と q ホイン方程式およびその変異版に関するプレプリントおよび q ミドルコンボリューションと q パンルヴェ方程式に関係するプレプリントを書き上げた。関連して単著でプレプリント「On symmetry of q -Painlevé equations and associated linear equations」を作成した。これらは後に査読を経て出版された。また、オンラインで開催された国際研究集会「International Conference Days on Diffraction 2021」において講演を行った。その講演では、前半で Kazakov 氏および Slavyanov 氏の業績を中心にホインの微分方程式とその周辺についての積分変換に関するレビューを行い、後半では q ミドルコンボリューションに係る q ホイン方程式の積分変換についての報告者らの結果を発表した。この内容は、査読付きの国際会議プロシーディングスとして出版された。また、松縄氏と佐藤氏と共著論文についても、別の査読付き国際会議プロシーディングスとして出版された。

2022 年度には、お茶の水女子大学の大学院生である新井由美氏と共同研究を行い、 q ミドルコンボリューションの収束性および変異版 q 超幾何方程式について研究成果を得ることができた。 q ミドルコンボリューションは坂井氏・山口氏(2017 IMRN)により導入されており、 q 変形された積分であるジャクソン積分との関係も調べられていた。新井氏と報告者により、 q ミドルコンボリューションに付随するジャクソン積分に対して 1 パラメーター拡張を行った上で収束性に関する議論も含めて再定式化を行った。そして、この再定式化された q ミドルコンボリューションを用いることで、変異版 q 超幾何方程式のいくつかの解を導出することができた。また、前述の佐々木氏、高木氏との共同研究により得られた q パンルヴェ方程式の初期値空間と q ホイン方程式およびその変異版に関する論文および q ミドルコンボリューションと q パンルヴェ方程式に関係する論文について、改訂を経て採択された。他に 2 本の論文が採択された。

研究期間全体を通じて、とくに q ホイン方程式や変異版 q 超幾何方程式について研究が当初の想定を超えて進展した。

< 引用文献 >

K. Takemura, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painlevé equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008.

H. Sakai, M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Not.* **2017** (2017), 1975-2013.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Sasaki Shoko, Takagi Shun, Takemura Kouichi	4. 巻 782
2. 論文標題 q-Heun equation and initial-value space of q-Painleve equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Contemp. Math.	6. 最初と最後の頁 119 ~ 142
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/782/15725	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takemura Kouichi	4. 巻 B91
2. 論文標題 On symmetry of q-Painleve equations and associated linear equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 103 ~ 119
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hatano Naoya, Matsunawa Ryuya, Sato Tomoki, Takemura Kouichi	4. 巻 65
2. 論文標題 Variants of q-Hypergeometric Equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 159 ~ 190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.65.159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sasaki Shoko, Takagi Shun, Takemura Kouichi	4. 巻 18
2. 論文標題 q-Middle Convolution and q-Painleve Equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Matsunawa Ryuya, Sato Tomoki, Takemura Kouichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Variants of Confluent q-Hypergeometric Equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications	6. 最初と最後の頁 161 ~ 180
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-78346-4_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takemura Kouichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Heun's differential equation, integral transformation and q-deformation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 2021 Days on Diffraction	6. 最初と最後の頁 152 ~ 156
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/DD52349.2021.9598793	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kojima Kentaro, Sato Tsukasa, Takemura Kouichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Ultradiscrete limit of the spectral polynomial of the q-Heun equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Differential and Difference Equations	6. 最初と最後の頁 297 ~ 312
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/9783110611427-010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kojima Kentaro, Sato Tsukasa, Takemura Kouichi	4. 巻 25
2. 論文標題 Polynomial solutions of q-Heun equation and ultradiscrete limit	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 647 ~ 664
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10236198.2019.1619709	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takemura Kouichi	4. 巻 2153
2. 論文標題 Heun's differential equation and its q-deformation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 AIP Conf. Proc.	6. 最初と最後の頁 020020-1 ~ -6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5125085	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chen Zhijie, Kuo Ting-Jung, Lin Chang-Shou, Takemura Kouichi	4. 巻 288
2. 論文標題 On reducible monodromy representations of some generalized Lamé equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 679 ~ 688
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-017-1906-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chen Zhijie, Kuo Ting-Jung, Lin Chang-Shou, Takemura Kouichi	4. 巻 264
2. 論文標題 Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich-Verdier potential and related problems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 5408 ~ 5431
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.01.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takemura Kouichi	4. 巻 14, 061
2. 論文標題 On q-Deformations of the Heun Equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.061	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Igarashi Hikaru, Takemura Kouichi	4. 巻 59
2. 論文標題 On two-parameter solutions of simultaneous ultradiscrete Painleve II equation with parity variables	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 103502 ~ 103502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5020867	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 新井 由美, 竹村 剛一
2. 発表標題 On q-middle convolution and q-hypergeometric equations
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kouichi Takemura
2. 発表標題 On q-Heun equation and q-Painleve equation
3. 学会等名 The Twelfth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kouichi Takemura
2. 発表標題 Heun's differential equation, integral transformation and q-deformation
3. 学会等名 International Conference Days on Diffraction 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kouichi Takemura
2. 発表標題 On q-Painleve equation and q-Heun equation
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations on the Internet 2021 (FASnet21) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹村 剛一
2. 発表標題 On q-Heun equation and q-Painleve equation
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「可積分系数理の諸相」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹村 剛一, 佐々木 瞳子, 高木 駿
2. 発表標題 qパンルヴェ方程式の初期値空間とqホイン方程式
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹村 剛一, 佐々木 瞳子, 高木 駿
2. 発表標題 ミドルコンボリューションのq変形とqパンルヴェ方程式
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 波多野 修也, 松縄 竜弥, 佐藤 智輝, 竹村 剛一
2. 発表標題 Variants of q-hypergeometric equation
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 TAKEMURA Kouichi
2. 発表標題 Basic hypergeometric function and q-Heun equation
3. 学会等名 Geometric and Harmonic Analysis on homogeneous spaces and Applications in Honor of Professor Takaaki Nomura (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹村 剛一
2. 発表標題 On q-deformations of the Heun equation
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合講演会無限可積分系セッション
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------