

令和 6 年 4 月 25 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03386

研究課題名（和文）非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解構造の解明

研究課題名（英文）Elucidation of structure of solutions to chemotaxis systems with non-linear sensitivity functions

研究代表者

仙葉 隆（Senba, Takasi）

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：30196985

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では非線形知覚関数の中で重要となる対数関数を知覚関数に持つ走化性方程式系の解の時間大域的存在と有限時刻解について成果を得た。我々は知覚関数の定数がある値（以後、閾値と呼ぶ）より小さい場合は、爆発解をもたないことを示した。この研究において、単純化された方程式系の解を補助関数として用いることでこの成果を得た。この手法は我々が発見した新たな手法である。

また、現在までは閾値の2倍以上の定数に関して爆発解の存在が知られていたが、本研究によって、閾値とその2倍の閾値の間の定数についての系が爆発解をもつことを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

線形の知覚関数を持つ走化性方程式系の解の性質に関しては解の時間大域的存在及び爆発の両面から研究が進んでおり、リアプノフ関数とその研究に重要な役割を果たしている。一方、非線形知覚関数を持つ走化性方程式系のリアプノフ関数は発見されておらず、そのため研究は遅れており、その研究には今まで用いられた手法とは別の手法の発見が重要であった。本研究に用いられた補助関数を用いる手法によって非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の研究が進展することが期待できる。さらに、走化性方程式系は生物学的な現象を背景としており、非線形知覚関数の中でも対数関数は生物学のモデルの中で重要な位置づけとなっている。

研究成果の概要（英文）：We get some results on time-global existence and finite-time blowup of solutions to chemotaxis systems with nonlinear sensitivity functions. In particular, we concentrated our study in the case where sensitivity functions are positive constants times the logarithmic function. We clarify that those chemotaxis system do not have blowup solutions, if constants of logarithmic sensitivity functions are less than a certain value. We say the value threshold number. In this study, we use solutions to a simplified system as auxiliary functions. This argument is found by our research.

On blowup of solutions, it is known that those systems have finite-time blowup solutions if constants of logarithmic sensitivity functions are bigger than 2 times threshold number. We construct finite-time blowup solutions to those systems also in the case where the constant is a certain value between threshold number and 2 times threshold number.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：走化性方程式系 知覚関数 時間大域的存在 爆発

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は、線形知覚関数を持つ走化性方程式系(以後、Keller-Segel 系と呼ぶ)の解の研究が活発に行われており、Keller-Segel 系が持つリアプノフ関数を用いた解の時間大域的な存在条件の研究や爆発解の構成の研究が主流であった。リアプノフ関数以外にも他の関数方程式の研究に標準的に用いられている手法を組み合わせているが、走化性方程式系の研究にはリアプノフ関数を用いる手法が標準的であり、Keller-Segel 系以外の走化性方程式系の研究も概ねリアプノフ関数を持つような系の研究が主流であった。

一方、背景となる生物学の現象の解明のために導出された走化性方程式系の知覚関数は線形であり、Keller-Segel 系はその知覚関数を線形近似した方程式系と理解できる。従って、応用の観点からも非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解析が必要な状況であった。

ただし、引用文献を代表例として、対数知覚関数を持つ走化性方程式系の弱解の時間大域的な存在に関する研究がある。その解の定義は複雑であるが、本質的に時間・空間上での積分が有界である関数を対象としており、考えている時間・空間の中の各時刻・各点ごとの有界性は論じていない。我々が目的とする解の性質は、各時刻・各点における解の有界性の解明であり、ある時刻・ある点において値が発散する爆発解の構成が目的であるので、を代表例とする弱解の研究とは目的をことにしていた。

また、引用文献において対数関数を知覚関数とする解の爆発の構成がなされていたが、3. 研究方法、並びに 4. 研究成果の欄に述べるように本研究目的の一つの証拠とはなるが不十分な結果である。

## 2. 研究の目的

1. 研究開始当初の背景で述べたように、Keller-Segel 系の研究手法であるリアプノフ関数を用いた研究手法に変わる手法を開発し、それを用いて非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解の性質を解の時間大域的な存在と解の有界性、時間大域的に非有界な解の存在を含む爆発解の存在に関する方程式系の条件を明らかにすることである。

特に、非線形知覚関数の中でも応用上重要である対数関数を知覚関数に持つ走化性方程式系に関して前述した解の性質並びにそのような性質を持つ解と方程式系との関係を明らかにする、事を目的とした。

## 3. 研究の方法

非線形知覚関数の中でも応用上重要であり、非線形知覚関数の中でも時間に依存しない定常解と呼ばれる解の性質が比較的良好に知られている対数関数が知覚関数である場合を研究することとした。また、本研究の対象となる比較関数は2本の発展方程式(解となる未知関数が時刻と場所に対応する変数を持つ偏微分方程式)で構成されている。それらどちらかの時間微分の項を取り除いた極限方程式系の文献調査並びに研究から始めることとした。

次の研究方法としてはそれらの極限方程式系の研究から対数関数を知覚関数に持つ走化性方程式系の解構造を予想し、極限関数の研究に使われた手法を改善、改良し本研究対象となる走化性方程式系の研究に適応するという手法を用いることとした。

上記の研究手法から、解の時間大域的な存在や有界性に関しては、極限方程式系の解を補助関数として用いる手法が有効であることが明らかになった。また、爆発解に関しては、定常解の性質が比較的良好にわかっている場合にその構造を利用することで今まで知られていなかった爆発解の構成を行うという方法で研究を行った。

## 4. 研究成果

3. 研究の方法で述べた順に研究成果を述べる。

最初に、極限方程式系の文献の調査によって、極限方程式系を記述するある正定数の大きさによって解の性質が変わることが先行研究によって明らかになっていることがわかった。我々の研究対象となっている走化性方程式系の知覚関数は正定数掛ける対数関数であり、極限方程式の解の性質を左右する制数と対数知覚関数の正定数が対応することがわかった。つまり、対数関数の係数である正定数がある値よりも小さければ、走化性方程式系の全ての解は時間大域的に存在し有界であり、その定数がある値より大きければ、走化性方程式系は爆発解を持つことが予想された。この値を閾値と呼ぶことにする。

この予想と極限方程式系の解の性質を用いることで走化性方程式系が極限方程式系に近い場

合、つまり 2 本の発展方程式の時間微分の正定数が非常に小さい場合に、極限方程式と走化性方程式との差を解析することにより、対数知覚関数の定数が閾値より小さい場合は全ての解が時間大域的に存在し有界であることを示した。

また、対数知覚関数の定数が閾値より大きな場合に関しては、対数知覚関数の定数が閾値と閾値の 2 倍の間のあるときに有限時刻で爆発解する解と無限時刻で爆発する解（時間大域的に存在するが非有界な解）を構成した。ここで、1. 研究開始当初の背景の欄で述べた の文献との関連であるが、 の文献では対数知覚関数の定数が閾値の 2 倍より大きな場合に有限時刻爆発解を構成している。Keller-Segel 系の爆発解に関しては多くの文献があるが、本研究結果以前は の文献が対数知覚関数を持つ走化性方程式系の爆発解に関する唯一の結果であったが、本研究によって閾値より大きくより閾値に近い値で爆発解を構成することができた。

#### <引用文献>

Nagai, T., Senba T.: Global existence and blow-up of radial solutions to a parabolic-elliptic system of chemotaxis. Adv. Math. Sci. Appl. (1998) 145--156.

② Quittner, P., Souplet, P.(2007). Superlinear parabolic problems, Birkhäuser, advanced text Basler Lehrbücher. Birkhäuser: Berlin.29.

Stinner, C., Winkler, M.(2011). Global weak solutions in a chemotaxis system with large singular sensitivity. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 12: 3727-3740.

Winkler, M.(2013). Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system. J. Math. Pures Appl. 100: 748-767.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Kentarou Fujie, Takasi Senba   | 4. 巻<br>222             |
| 2. 論文標題<br>Global existence and infinite time blow-up of classical solutions to chemotaxis systems of local sensing in higher dimensions | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Nonlinear Analysis   | 6. 最初と最後の頁<br>1-7       |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.na.2022.112987   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>Kentarou Fujie, Takasi Senba   | 4. 巻<br>35              |
| 2. 論文標題<br>Global boundedness of solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis system with local sensing in higher dimensions            | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Nonlinearity   | 6. 最初と最後の頁<br>3777-3811 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1088/1361-6544/ac6659   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>B. Bieganowski, T. C. Tomasz, K. Fujie, T. Senba   | 4. 巻<br>292             |
| 2. 論文標題<br>Boundedness of solutions to the critical fully parabolic quasilinear one-dimensional Keller-Segel system                      | 5. 発行年<br>2019年         |
| 3. 雑誌名<br>Mathematische Nachrichten  | 6. 最初と最後の頁<br>724-732   |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1002/mana.201800175   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>該当する            |
| 1. 著者名<br>Kentarou Fujie and Takasi Senba  | 4. 巻<br>31              |
| 2. 論文標題<br>A sufficient condition of sensitivity functions for boundedness of solutions to a parabolic-parabolic chemotaxis system       | 5. 発行年<br>2018年         |
| 3. 雑誌名<br>Nonlinearity   | 6. 最初と最後の頁<br>2417-2450 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1088/0951-7715/29/8/2417  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆   |
| 2. 発表標題<br>Behavior of solutions to some chemotaxis systems with local sensing |
| 3. 学会等名<br>九州関数方程式セミナー（招待講演）   |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆                              |
| 2. 発表標題<br>Keller-Segel 系に関連する方程式系の解の挙動について |
| 3. 学会等名<br>非線型偏微分方程式と走化性（招待講演）              |
| 4. 発表年<br>2022年                             |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆                          |
| 2. 発表標題<br>走化性方程式系に関連する方程式系の解の挙動の閾値について |
| 3. 学会等名<br>第10回 弘前非線形方程式研究会（招待講演）       |
| 4. 発表年<br>2022年                         |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆、内藤雄基                       |
| 2. 発表標題<br>特異定常解より大きい爆発形状を持つ不完全爆発解の存在について |
| 3. 学会等名<br>2019年度秋季総合分科会                  |
| 4. 発表年<br>2019年                           |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆                         |
| 2. 発表標題<br>非線形知覚関数を持つ走化性方程式系の解の有界性について |
| 3. 学会等名<br>2018夏の偏微分方程式セミナー            |
| 4. 発表年<br>2018年                        |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>仙葉隆                           |
| 2. 発表標題<br>対数関数を知覚関数に持つ走化性方程式系 の解の挙動について |
| 3. 学会等名<br>2024年度日本数学会年会（招待講演）           |
| 4. 発表年<br>2024年                          |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Takasi Senba   |
| 2. 発表標題<br>Behavior of solutions to chemotaxis systems with nonlinear sensitivity functions<br>Behavior of solutions to chemotaxis systems with nonlinear sensitivity functions |
| 3. 学会等名<br>The 7th International Workshop on Mathematical Analysis of Chemotaxis（招待講演）（国際学会）  |
| 4. 発表年<br>2024年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Takasi Senba   |
| 2. 発表標題<br>Behavior of solutions to an indirect chemotaxis system |
| 3. 学会等名<br>8th Euro-Japanese workshop on blow-up（招待講演）（国際学会）      |
| 4. 発表年<br>2018年   |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関                   |  |  |  |
|---------|---------------------------|--|--|--|
| ポーランド   | Polish Academy of Science |  |  |  |