2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月１１日現在

機関番号：１２１０２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：１８Ｋ０３３８９

研究課題名（和文）多変数多項式系の主変数消去法の革新的高速化の研究

研究課題名（英文）Study of innovative speeding-up of main-variables elimination of multivariate polynomial systems

研究代表者

佐々木　建昭（SASAKI, Tateaki）

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：８００８７４３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：多変数多項式系の変数消去には、終結式法とグレブナー基底(G基底)法がある。前者は速いが大きな余計因子を含み、後者は結果式は完璧だが計算量が二重指数的との欠点がある。
まず二多項式系 {G,H} に対して,終結式 R=res(R,H)とAG + BH = Rを満たすA,Bを計算すればＧＣＤ(最大公約子)演算により余計因子が完全に除去できる事を証明した。次に(m+1)多項式系(m>2)では、変数の順序を変えて複数通りの変数消去を行えば、それらのＧＣＤよりイデアル最低元の小倍数が計算できる。他にも多くの小倍数計算法を与えた。
コロナ期間中は剰余列からＧ基底要素を直接計算する効率的算法を考案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
The bone of Buchberger's algorithm for Groebner basis computation has been almost unchanged more than 60 years, and we had no method for extraneous factor removal for resultants.
This research gave solutions for these many-years unsolved problems, although they must be revised still more.

研究成果の概要（英文）：As for variable elimination of polynomial systems, we have now two methods. The resultant method can eliminate variables quite fast but the result contains very big extraneous factors, while the Groebner basis (G-base) method gives a complete result but it is very slow.
As for two polynomial system {G,H}, we proved that if we compute the resultant R = res(G,H) and A and B s.t. AG + BH = R, we can remove the extraneous factor of R fully by using ＧＣＤ (Greatest Common Divisor) for A and B. For (m+1)-polynomial system, with m>2, we obtain m resultants by eliminating variables by changing their order, then ＧＣＤ of the resultants is a small multiple of the lowest order element of the ideal. We have also found several methods of computing small multiples.
Thirdly, we developed a method of computing small multiples of G-basis elements from the elements of polynomial remainder sequence efficiently.

研究分野：Computer algebra

キーワード：多変数多項式系の変数消去　終結式　終結式の余計因子　グレブナー基底　グレブナー基底法　多項式イデアル　イデアルの最低元　Buchbergerの算法

1. 研究開始当初の背景

(1) 科学の探求と技術の進展において，数値シミュレーションの果す役割は万人の認めるところだが，数式演算をコンピュータで実行する “数式処理” の重要性も専門家の間では広く認められている。
多項式や有理式演算には算法と言うほどの数学は必要ないが，多項式の因数分解や初等関数の不定積分では，数学者でも「一体，どんなアルゴリズムで計算してるの？」と考え込むような算法が開発されている。さらに，与えられた複数個の多項式から指定された変数群を消去する，いわゆる “変数消去演算” がそれに続く。変数消去に関しては，1670 年代に世界に先駆けて，日本で関孝和らにより実行された。その後，ヨーロッパで終結式の行列式表現がでてくると，“余計な因子 (extraneous factor) が結果式に含まれることがある” と分って，厳密性を重視する計算ではあまり使われなくなったが，厳密性を重視しない場合には，広く一般に使われている。代数計算を中心にした数式処理は，今では “計算代数 or 計算機代数” と呼ばれる。計算代数の代表的演算として，ここでは連立多項式方程式の解空間 (根全体がなす [一般に非常に複雑な] 図形のこと) の計算を取り上げるが，これ以外にも応用例が非常に多岐にわたることは勿論である。

(2) 計算対象が複雑になると，計算理論も数学的に高度化するのが常で，上記の連立多項式方程式の解計算にも有名な Hilbert の理論，いわゆる多項式イデアル理論が用いられるようになった。ここで専門的になるが，多項式イデアルとは何かを簡単に説明する。$P_1, P_2, \ldots, P_k$ を与えられた多項式とし，$a_1, a_2, \ldots, a_k$ を任意の多項式とするとき，$a_1P_1 + a_2P_2 + \cdots + a_kP_k$ の形の多項式は無限個ある [$(a_1, \ldots, a_k)$ の組が無限個あるから]。これらの無限個の多項式全体を “多項式イデアル” といい，$\langle\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}\rangle$ と表す。そして，多項式集合 $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ を “イデアルの基底” という。

(3) 多項式イデアル論を使うと，連立方程式 $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$ の解空間が何次元か，どんな部分空間に分解されるか，などを理論的に解析できる。さすがは Hilbert の理論である。だが，実際にその解空間を計算しようと未定係数法を適用すると，未定係数の個数が多過ぎて『机上の空論』であることが分る。そこで，基底多項式自体を使い易いものに作り変えるというアイデアが出された。その試みの中で Gröbner が素晴らしい基底を発見した。彼は多項式を全て単項式の和で表し，各単項式では各変数を順序づけて表す。ゆえに，二つの項が割り切れるか否かが簡単に決まる。多項式 A の先頭項が多項式 B の先頭項を数係数を除き割り切るとき，A は B を簡約するという。Gröbner は，先頭項の簡約演算を導入することで，勝手に与えられた多項式 Q が $P_1, P_2, \ldots, P_k$ で生成されるイデアルの要素か否かを，簡約演算だけで決定できる基底の存在を証明した。

(4) しかし，Gröbner 自身は発見した基底 (“グレブナー基底” と呼ばれる) の計算方法を示すまでには至らなかった。計算法は，1965 年，弟子の Buchberger(当時大学院生) により発見された。算法は実に簡単だが，実行すると延々と時間がかかることが多い。しかも，簡単であるが故に効率化が実に難しい。そのことを理解してもらうため，算法を極く簡単に説明する。

(5) 算法では，Gröbner に倣い，変数は全て一意的に順序づけ，多項式は全て単項式の和で表現する (各単項式は，先頭から順序の高い順に整列される)。グレブナー基底は，二つの演算 $\mathrm{Spol}(G, H)$ と $\mathrm{Mred}(G, H)$ だけで計算される。与多項式 G, H に対し，$\mathrm{Spol}(G, H)$ は G と H に単項式を掛けて，G と H の先頭の項同士をキャンセルさせるが，掛ける単項式は可能な限り低い順位のものとする。また，$\mathrm{Mred}(G, H)$ は H の先頭項が G の先頭項を割り切るかどうかチェックし，割り切る場合は商を q とすると，$\mathrm{Mred}(G, H) = G - qH$ を返す (G の先頭項消去)。割り切らない場合は G を返す。
最後に，グレブナー基底を計算するには，次のようにする。基底を $\mathcal{B}$ で表す。$\mathcal{B}$ は与基底に初期設定する。$\mathcal{B}$ からなるべく順位の低い異なる二要素 E_i, E_j を取り出し，$E_{i,j} := \mathrm{Spol}(E_i, E_j)$ を計算し，$E_{i,j}$ を $\mathcal{B}$ の要素で可能な限り簡約し，その結果式を $\widetilde{E}$ とする。$\widetilde{E} = 0$ なら次の Spol 生成に行く。$\widetilde{E} \neq 0$ なら $\mathcal{B}$ の全要素を $\widetilde{E}$ で簡約したあと，$\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{\widetilde{E}\}$ とし，次の Spol 生成にいく。この手順を，全ての Spol 生成が尽きるまで続ける。そして，最後に残った基底 $\mathcal{B}$ がグレブナー基底である。このとき，$\mathcal{B}$ の任意の二つの要素 E_i, E_j に対し，上記の $\widetilde{E}$ は 0 となる。

(6) 上記の Buchberger 算法は構造が極めて単純で，Spol の引数の選び方や巧妙な項順序の開発などに工夫の余地はあったが，後に続く研究者の出番が非常に少ない算法である。実際，算法の骨格は，1965 年の算法発見以来約 60 年間も不変である。では，Buchberger 算法は十分に速いのかと言えば，そうではない。変数の個数が多くなると，もの凄く遅くなるのだ。実際，計算量は変数の個数 (消去

される変数＋されない変数) に関して，二重指数的であることが証明されている。一方，数学以外も含めた応用面からみると，グレブナー基底は現在の計算機代数において最も重要な算法なのである。その高速化は計算機代数の多くの応用分野に計りしれない恩恵をもたらすだろう。

(7) **まとめ** 非常に長い歴史を持つ**終結式法 (剰余列法)** は古いが，計算は速い。しかし，余計因子を含む欠点がある。**グレブナー基底**を計算すれば，その最低元として余計因子を一切含まない多項式が計算できるが，変数の個数が多い場合は (変数の個数に関し) 二重指数的計算量を必要とする。

2．研究の目的

(1) グレブナー基底は現代の “計算代数/計算機代数” とその応用において最重要である。しかし，それを計算する Buchberger 算法は，変数の個数が多い場合は絶望的に遅い。かと言って，その算法を Spol と Mred の枠組み (= Buchberger の枠組み) で高速化するのは,『研究開始当初の背景』で述べたごとく，非常に難しいのである。実際，Buchberger 算法の発見以後の約 60 年間で，当初こそ数係数膨張への対策など重要な高速化があったが，2000 年以降に限れば，話題に上がるのはフランスの Faugère が提案した 2 件の改良くらいである。例えばその内の 1 件は，Mred を (関係する多項式群を係数ベクトルの行列で表現し) 行列簡約に変換して高速化するものである。

(2) 一方，研究代表者は，従来の枠組みを全く離れて，誰もチャレンジして来なかった枠組みで挑戦する。従来の枠組みに囚われる限り，せいぜい Faugère 程度の効率化しか達成できない。それを遥かに超える高速化を達成するには，世界の誰も見向きもしなかった方法を使おう，と決めていた。

3．研究の方法

(1) **2.**(2) で言及した “誰もチャレンジしなかった枠組みで挑戦する” とは，古くて今や誰も見向きもしない**終結式法**を正面に据えて課題を攻略することである。終結式法は，主変数を消去した結果式が余計因子を含むが，過去の経験から，余計因子はその大部分を除去できる自信があった。終結式の計算の元となる Euclid の互除法／拡張互除法は昔から馴染みである上，計算プロラムの蓄積もある。一方，Buchberger 算法の計算量の壁は定理であり，手の打ちようがないのである。

(2) しかし，Buchberger 算法を使わないわけではない。変数消去でグレブナー基底まで辿り着くには，最終的に Buchberger 算法を起動せざるを得ない。では何処で終結式法を使うかと言うと，初期段階で高位の変数を高速に消去するのに使うのである。Buchberger 算法の一番の弱点は，高位変数を次々消去するのに非常に時間がかかり，低位変数の消去にまでなかなか辿りつけないことである。この弱点を終結式法を利用することで克服するのである。

4．研究成果

(1) 2 多項式系 $\{G(x,\boldsymbol{u}),H(x,\boldsymbol{u})\}$, $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_n)$ の場合，終結式 $R=\mathrm{res}_x(G,H)$ を Euclid の互除法で，$R=AG+BH$ を満たす**生成元係数** (A,B) を拡張互除法で計算すれば，簡単なＧＣＤ (最大公約子) 操作により，イデアル $\langle\{G,H\}\rangle$ の最低元が計算できる ($\Rightarrow$ 定理，下に証明)。

この定理は本研究課題が始まる前年に証明したが，本研究課題において，正にスタート台となる定理なので，敢えてここで提示する。ただし，G と H は互いに素であると仮定する**:** G と H が共通因子 C を持てば，イデアル $\langle\{G,H\}\rangle$ の全要素は C の倍数となるので，そう仮定せざるをえない。

定理の証明の概略。$\mathbb{K}$ は数体とし，$G,H\in\mathbb{K}[x,\boldsymbol{u}]$ とする。$\widehat{S}$ をイデアル $\langle\{G,H\}\rangle$ の最低元とし，$\widehat{S}=\widehat{A}G+\widehat{B}H$ とする。(deg は多項式の x に関する次数を表すとする)。$\deg_x(\widehat{A})\ge\deg_x(H)$ かつ $\deg_x(\widehat{B})\ge\deg_x(G)$ の場合，$\widehat{A}$ を H で割り $\widehat{B}$ を G で割って，次数条件 $\deg_x(\widehat{A})<\deg_x(H)$ かつ $\deg_x(\widehat{B})<\deg_x(G)$ を満たさせることができる。

これらを前提に，終結式 R と 生成元係数 (A,B) を考える。拡張互除法定理より (A,B) は次数条件を満たし一意に定まる。$A=C_dx^d+\cdots+C_0$ $(C_i\in\mathbb{K}[\boldsymbol{u}])$ と表し，$\mathrm{cont}(A)\overset{\mathrm{def}}{=}\gcd(C_d,\cdots,C_0)$ と定め，$c:=\gcd(\mathrm{cont}(A),\mathrm{cont}(B))$ とする。明らかに，c は R の余計因子 (の一部) である。

最後に，$(\widehat{S},\widehat{A},\widehat{B})$ と (R,A,B) の関係を考える。明らかに $R=C\widehat{S}$, $C\in K[\boldsymbol{u}]$ ゆえ，$C\in\mathbb{K}$ ならば定理が成立する。そこで，$C\notin\mathbb{K}$ とする。上記で述べたように，$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ は次数条件を満たすとする。すると，$A_kG+B_kH=P_k=C\times(\widehat{A}G+\widehat{B}H)\Rightarrow(A_k-C\widehat{A})G+(B_k-C\widehat{B})H=0.$ これらと次数条件より，$A_k=C\widehat{A},\ B_k=C\widehat{B}$ を得るが，これらは A_k と B_k が共通因子 C を持つことを意味するので，A_k と B_k の最小性に反する。したがって，$C\in\mathbb{K}$ である。(QED)

上記の定理は単純明快で，計算速度は超高速，しかも余計因子 0 だ。よくもこんなに見事な定理が

「未知」で残っていたものだ。そんな定理の発見者になることができ，幸運の極みである。論文の査読者 (外国人) の一人が「誰か先人が発見したはずだ」と，しつこく食い下がってきたが，それならその論文を提示すべきだと反論したら，なにも言えなくなった。

(2) 健康な系 (healthy system と命名した) の導入。我々は学校で標準的な多項式系ばかりを扱ってきたせいか，多変数多項式系の中にはトンデモナイモノもあることに気付いていない。たとえば，$\mathcal{F}_{\rm nil} := \{\cdots, F_i, \cdots, F_{j>i} = F_i + 1, \cdots\}$ なる系に対しては，グレブナー基底は $\{1\}$ であり，“解無し” であることが分る: グレブナー基底の [各要素 $=0$] が解を与えるが，今は $1=0$ ゆえ解はない。一方，$\mathcal{F}_\infty := \{\cdots, F_i, \cdots\}$, $F_i = F'_i \times G$ $(\forall i)$, ではグレブナー基底は $\{G'_1 G,\ G'_2 G,\ \cdots\}$ である；ここで，$\{G'_1, G'_2, \cdots\}$ は多項式系 $\{F'_1, F'_2, \cdots\}$ のグレブナー基底である。

上記のような入力は一括して排除すべきであり，それが健康な系を定義する目的である。研究代表者は，多項式系 $\mathcal{F}$ が健康であることとして，次の２条件を課した: I: 主変数 $x_1, \ldots, x_m$ はすべて消去でき，かつ II: 従変数 $u_1, \ldots, u_n$ はどれも消去できない。これより，$\mathcal{F}_{\rm nil}$ も $\mathcal{F}_\infty$ も不健康となる。

(3) $(m+1)$ 多項式系の変数消去：(従来の) 変数の三角化でなく，(本課題独自の) 四角化を実行。

$(m+1)$ 多項式系の変数消去には，上述の２多項式系用算法を繰り返し用いる。その結果どうなるか？ 簡単な例を計算してみると直ちに分る: 消去結果式が大きな余計因子を含むのである。大抵，余計因子の方がイデアルの最低元よりも遥かに大きくなる。即ち，余計因子除去が不可欠である。

余計因子を完璧に除去する方法は未発見だが，大部分を除去する方法は，本研究課題の最優先事項として発見した。その方法は次のアイデアに基づいている。我々は今，主変数を全て消去して消去イデアルの最低元 $\widehat{S}$ を計算しようとしている。主変数を全て消去して得られる多項式は，全て $\widehat{S}$ かその倍数だから，複数個の異なるルートで主変数消去を行なえば，それらのＧＣＤは，大抵 $\widehat{S}$ の小倍数，即ち余計因子が小さいはずだ。かくして，余計因子の大部分が除去可能になった。

上記の手順を数式化すると，変数の四角化の意味が明白になる。与多項式系を $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_m, F_{m+1}\}$ とする。従来の変数消去法は，まず $\mathcal{F}$ から算式 $G_i := {\rm Elim}_{x_1}(F_i, F_1)$ $(i := 2, \ldots, m+1)$ で x_1 を消去。次に，$\{G_2, \ldots, G_m, G_{m+1}\}$ から算式 $H_j := {\rm Elim}_{x_2}(G_j, G_2)$ $(j := 3, \ldots, m+1)$ で x_2 を消去 ・・・ と主変数を消去していく。この方法は，残った主変数が逆三角形状に減少することから (変数の) 三角化と呼ばれる。一方，研究代表者は，変数の消去順序を最大 m 通りに変える (たとえば，$(x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_m) \Rightarrow (x_2 \to x_3 \to \cdots \to x_1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x_m \to x_1 \to \cdots \to x_{m-1})$)。この方法ではどのルートでも m 個の主変数が消去されるから，四角化法と呼んでいる。

四角化と言っても $m \times m$ の正方形にする必要はなく，$m \times 3$ くらいの長方形で余計因子はほとんど除去できるが，完全に除去することはこの方法では無理である。

(4) グレブナー基底の最低元以外の要素の効率的計算法：“**LCtoW**” 演算の導入。

上記 **3.**(2) で言及したように，研究代表者は終結式法を用いて上位変数の消去を (少々の余計因子の混入は気にせず) 高速に実行する。その真髄が活かされるのがこの項目である。上記の (1)〜(3) の項目では終結式だけを用いてきた。終結式は多項式剰余列の最終要素であるが，剰余列の初期多項式を G と H とすれば，これらはいずれも，最初に与えたイデアルの生成元である。そして剰余列の全ての要素はイデアルの元である。これらをグレブナー基底の最低元以外の要素の計算に利用する方法があるはずだ。実際，それらをそのまま使う手もある。しかし，それでは余りに芸がない。

そこで，次のようにする。まず，グレブナー基底のターゲットとする要素の主変数 (x_i) とその次数 (d_i) を定め，それに対応する剰余列の要素を探す。我々は，前段階で余計因子除去のため，複数のルートで剰余列を計算しているので，剰余列要素として，主変数が x_i で次数が d_i の剰余が複数個あるはずだ。それらを $R_1, \ldots, R_l$ $(l \geq 2)$ とし，各 R_j を $R_j = C_j x_i^{d_i}$ と表す。ここで，係数 C_j は x_i より低順位の変数の多項式である。次に我々がなすべきことは，係数 $C_1, \ldots, C_l$ を組合わせて，なるべく順位の低い多項式を生成することである。たとえば C_1 と C_2 を初期値とする剰余列を計算し，終結式 $c_{i,j} := {\rm res}_{x_{i+1}}(C_i . C_j)$ とその生成元係数 A, B を計算する：$c_{i,j} = AC_i + BC_j$. このとき，$W_{i,j} \stackrel{\rm def}{=} AR_i + BR_j$ は, 主変数 $= x_i$, 次数 $= \max(R_i の次数, R_j の次数)$, $W_{i,j}$ の主係数 $= c_{i,j}$ を満たす。この手順は非常に低順位の主係数 $c_{i,j}$ から，$x_i^{d_i}$ を持つイデアル要素である $W_{i,j}$ を作るので，LCtoWhole 演算，略して **LCtoW 演算**と命名した。LCtoW 演算をグレブナー基底の低次から５要素ほどでテストしたが，結果は非常に良好だった。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 Tateaki Sasaki, Masaru Sanuki, and Daiju Inaba	４．巻 -
２．論文標題 Proposal of multivariate polynomial arithmetic in a secified width of high- or low-exponents	５．発行年 2022年
３．雑誌名 SYNASC21. IEEE Conferece Publishing Services	６．最初と最後の頁 25 - 32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/SYNASC54541.2021.00016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 佐々木建昭	４．巻 2255巻
２．論文標題 ＴＥＳ (Term Elimination Sequence) について	５．発行年 2023年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 39, 50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tateaki Sasaki, Masaru Sanuki, Daiju Inaba, Fujio Kako	４．巻 2185
２．論文標題 An Attempt to Enhance Buchberger's Algorithm by Using Remainder Sequences and GCDs (II)	５．発行年 2021年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku (数理解析研究所講究録)	６．最初と最後の頁 71, 80
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 佐々木 建昭, 讃岐 勝, 稲葉 大樹	４．巻 2138
２．論文標題 拡張Hensel構成の効率化 -- 疎な多変数多項式の因数分解を念頭に	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 87, 95
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Tateaki Sasaki	４．巻 なし
２．論文標題 Computing the Lowest-order Element of a Multivariate Elimination Ideal by Using Remainder Sequences	５．発行年 2019年
３．雑誌名 SYNASC 2018 (Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing)	６．最初と最後の頁 37,44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 佐々木　建昭	４．巻 なし
２．論文標題 多変数多項式系の消去イデアルの最小元を剰余列算法で計算する	５．発行年 2018年
３．雑誌名 第４７回数値解析シンポジウム予稿集（電子版）	６．最初と最後の頁 39 -- 42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 佐々木　建昭、　稲葉　大樹	４．巻 2104
２．論文標題 疎な多変数多項式系の高速な変数消去法の探求	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 65 -- 77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　1件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 佐々木建昭
２．発表標題 ＴＥＳ (Term Elimination Sequence) について
３．学会等名 ＲＩＭＳ共同研究　Computer Algebra - Theory and its Applications
４．発表年 2022年

１．発表者名
Tateaki Sasaki

２．発表標題
A Bridge between Euclid and Buchberger (An Attempt to enhance Groebner basis algorithm by PRSs and GCDs)

３．学会等名
SCSS2021 -- Symbpolic Computation in Software Science（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
Tateaki Sasaki, Masaru Sanuki, Daiju Inaba

２．発表標題
Proposal of Multivariate Polynomial Arithmetic in a Specified Width of High- or Low-Exponents

３．学会等名
23rd Intern'l Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
Tateaki Sasaki, Masaru Sanuki, Daiju Inaba, Fujio Kako

２．発表標題
An attempt to enhance Buchberger's Algorithm by using remainder sequences and GCDs (II)

３．学会等名
RIMS 共同研究, Computer Algebra - Theory and its Applications

４．発表年
2020年

１．発表者名
佐々木 建昭

２．発表標題
多変数多項式系の極小消去系と革新的算法

３．学会等名
応用数理学会・数値解析シンポジウム

４．発表年
2019年

１．発表者名
Tateaki Sasaki

２．発表標題
An Attempt to Enhance Buchberger's Algorithm by Using Remainder Sequence and GCD Operation

３．学会等名
21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
佐々木 建昭

２．発表標題
剰余列とGCDによる辞書式グレブナー基底計算に対する種々の技法

３．学会等名
数理解析研究所研究集会：Computer Algebra -- Theory and its Applications

４．発表年
2019年

１．発表者名
Tateaki Sasaki, Daiju Inaba

２．発表標題
Computing the Lowest-order Element of a Multivariate Elimination Ideal by Using Remainder Sequences

３．学会等名
20th Intern'l Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
佐々木 建昭

２．発表標題
多変数多項式系の消去イデアルの最小元を剰余列法で計算する

３．学会等名
第４７回数値解析シンポジウム

４．発表年
2018年

１．発表者名 佐々木 建昭、讃岐 勝、稲葉 大樹
２．発表標題 拡張Hensel構成の効率化 -- 疎な多変数多項式の因数分解を念頭に --
３．学会等名 数理研共同研究 「Computer Algebra -- Theory and its Applications」
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関