

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03395

研究課題名(和文) 複素球面上の符号・デザインの研究

研究課題名(英文) Study on complex spherical codes and designs

研究代表者

須田 庄(Suda, Sho)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群  
・准教授

研究者番号：30710206

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：複素球面上の符号・デザインの研究の研究を行った。主要な研究として、複素球面上の半正定値計画法の設定および不定値内積複素球面上の符号理論の構築ができた。これらの成果により、線形計画法に基づいていた複素球面上の符号理論の更なる進展が見込まれる。また研究開始には予期していなかった不定値内積複素球面の符号理論は、有向グラフのエルミート隣接行列の固有値の重複度に関する応用があり、今後の発展が見込まれる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素球面上の符号・デザインの進展は、代数的組合せ論の重要な研究対象である可換アソシエーション・スキームと密接に関連する研究である。さらに複素MUBやSICPOVM、equiangular tight frameといった対象への応用が見込まれる。さらに不定値内積空間の符号理論の進展は、そのエルミート隣接行列の固有値を介して、有向グラフへの応用が見込まれる。研究成果の学術的意義は高いといえる。

研究成果の概要(英文)：I conducted research on code and design on the complex sphere. As a significant contribution, I established the framework of semidefinite programming on the complex sphere and developed the theory of codes with indefinite inner products on the complex sphere. These achievements hold the potential for further advancement in code theory on the complex sphere, which was previously based on linear programming. Additionally, the application of code theory on the complex sphere with indefinite inner products, which was not initially anticipated at the start of the research, shows promise in the context of the eigenvalue multiplicities of Hermitian adjacency matrices of directed graphs, suggesting future developments.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：可換アソシエーション・スキーム 符号 デザイン エルミート隣接行列 不定値内積空間 半正定値計画法 アダマール行列

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

量子情報理論に端を発する MUB や SICPOVM に対する組合せ論的な研究が盛んになっていた。これらの研究は複素射影空間上の符号理論・デザイン理論に基づいていた。種々の対象に対する構成・非存在性が明らかになっているが、6次元の複素完全 MUB の非存在性や SICPOVM の一般の次元の構成は明らかになっていない。これらの存在性・非存在性の決定は最も重要な問題として知られている。

複素射影空間上の符号理論・デザイン理論より情報量が多い複素球面上の符号理論・デザイン理論が代表者により 2014 年に構築された。その理論は多項式環へのユニタリー群の作用の既約表現を用いた線形計画法が主要な役割を果たしている。これまで本研究で対象とする複素 MUB や SICPOVM がある性質を持つ複素球面上の符号・デザインとして特徴づけられることが明らかになっていた。さらに、構成されていた複素 MUB や SICPOVM が可換アソシエーション・スキームの構造を有することが明らかになっていた。しかしながら、両者の存在・非存在への説明には至っていない。

### 2. 研究の目的

複素球面上の符号理論・デザイン理論は、それらのサイズの最大値・最小値を決定することが最も重要な問題である。本研究では代表者により構築された複素球面上の複素球面上の符号理論・デザイン理論の更なる進展を図り、複素 MUB や SICPOVM を含む種々の符号・デザインの存在性・非存在性を明らかにすることである。

### 3. 研究の方法

符号・デザインの存在・非存在について、以下の方法で研究を遂行する。

これまでの複素球面上の符号理論・デザイン理論は線形計画法に基づくものであった。ユニタリー群  $U(n)$  の一点固定部分群である  $U(n-1)$  の多項式環への作用を考える。この作用の isotypic component に付随する行列を用いて半正定値計画法を設定し、符号の上界を与えることで、非存在性を示す。

符号の構成については、有向グラフの Seidel 行列を用いて考察する。特に、単一の有向グラフでなくグラフの族がなす可換アソシエーション・スキームを構成する。付随する Bose-Mesner 代数の原始冪等元を用いた複素球面への埋め込みにより、複素球面上の符号を構成する。

デザインの構成については、複素格子に対する Assmus-Matson 型の定理を考察する。すなわち、原点から等距離にあるような複素格子の点がなす有限集合がどのような強さを持つデザインとなるかを明らかにする。

デザインの非存在については、組合せデザインの Bruck-Ryser 型の定理が拡張できるかを考察する。デザインに現れる内積や座標に制限を与えることで、ガウス整数を成分とする接続行列の存在性に関する必要条件を、Bruck-Ryser 型の定理のように与える。

本研究で考察する複素球面上の符号・デザインは可換アソシエーション・スキームの構造を有する例が多い。付随する可換アソシエーション・スキームの存在性・非存在性を示すことで元の符号・デザインの存在性・非存在性を明らかにする。

### 4. 研究成果

主要な成果は複素球面上の半正定値計画法を確立したことである。様々な符号の上界について、線形計画法で得られた結果が改善された。ただし、複素 MUB のような内積の絶対値が 0 ともう一種類である場合は、付随する半正定値行列が自明なものになるため、複素 MUB へ適用する場合は一点固定部分群  $U(n-1)$  より小さい部分群で考察する必要がある。これらの結果を論文にまとめて、現在投稿中である。

アダマール行列と直交ラテン方陣を用いた(可換)アソシエーション・スキームの構成の研究を多数行った。これにより、原始冪等元を用いた(複素)球面への埋め込みにより、現れる内積が少ない符号が多数得られた。

実アダマール行列に対して、balancedly splittable という概念を導入し、強正則グラフや equiangular tight frame との関連性を明らかにした。この研究を、アダマール行列の成分を変数に置き換えた行および列の直交性を持つ行列である直交デザインに拡張した。直交デザインの係数は実数、複素数や四元数とする。実アダマール行列の場合と同様に、それぞれの体上の equiangular tight frame が得られた。基礎体が複素数、四元数体の場合、構成された equiangular tight frame は連続変形が可能なものとなっている。四元数体上の equiangular tight frame は Waldron により 2020 年に提唱されたばかりのものであり、興味深い例が構成された。

本研究開始時点では予期していなかった重要な進展として、有向グラフのエルミート隣接行列の固有値の重複度の研究がある。これは有向グラフの不定値複素内積空間への埋め込みの研究である。正定値ユニタリー群に由来する研究が複素球面上の符号とみなすと、不定値ユニタリー群に由来する研究が不定値複素内積空間の球面上の符号である。実球面の場合はこれらの研究は 1980 年前後になされ、無向グラフの隣接行列の固有値の重複度の研究へと応用がなされた。この研究により、同様のことが有向グラフのエルミート隣接行列に対してできるようになった。

研究課題と関連する話題として ハミングアソシエーション・スキームの堅い 4- デザインの分類、balanced weighing matrix の新しい無限系列の構成、 $Q$ -多項式コヒアラント配置の研究など多数の方向で研究が進み、いずれも今後の発展が見込まれる話題である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 9件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Suda Sho	4. 巻 643
2. 論文標題 Q-polynomial coherent configurations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 166 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.02.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kharaghani Hadi, Pender Thomas, Suda Sho	4. 巻 186
2. 論文標題 Balanced weighing matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 105552 ~ 105552
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2021.105552	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kharaghani Hadi, Pender Thomas, Suda Sho	4. 巻 -
2. 論文標題 A Family of Balanced Generalized Weighing Matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Combinatorica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00493-021-4774-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kharaghani Hadi, Pender Thomas, Suda Sho	4. 巻 89
2. 論文標題 Balancedly splittable orthogonal designs and equiangular tight frames	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Designs, Codes and Cryptography	6. 最初と最後の頁 2033 ~ 2050
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10623-021-00897-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kharaghani Hadi, Suda Sho	4. 巻 69
2. 論文標題 Divisible design digraphs and association schemes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 101763 ~ 101763
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2020.101763	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kharaghani Hadi, Suda Sho, Tayfeh-Rezaie Behruz	4. 巻 -
2. 論文標題 Disjoint weighing matrices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-020-00981-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hadi Kharaghani, Sho Suda	4. 巻 63
2. 論文標題 Commutative association schemes obtained from twin prime powers, Fermat primes, Mersenne primes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2019.101631	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gavrilyuk Alexander L., Suda Sho, Vidali Jano?	4. 巻 -
2. 論文標題 On Tight 4-Designs in Hamming Association Schemes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Combinatorica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00493-019-4115-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kharaghani Hadi、Suda Sho	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Linked systems of symmetric group divisible designs of type?II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Designs, Codes and Cryptography	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10623-019-00622-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kharaghani Hadi、Suda Sho	4. 巻 342
2. 論文標題 Balancedly splittable Hadamard matrices	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 546 ~ 561
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.10.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Balanced Generalized Weighing matrices and Association Schemes
3. 学会等名 Virtual Carleton Combinatorics Meeting 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 On the eigenvalues of graphs of mutually orthogonal Sudoku Latin squares
3. 学会等名 Groups and Graphs, Semigroups and Synchronization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 直交数独方陣グラフの固有値
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第10回研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Two topics on equiangular tight frames
3. 学会等名 Codes and Expansions (CodEx) Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 Equiangular tight frameに関するある予想について
3. 学会等名 2022 早稲田整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 On the multiplicities of digraph
3. 学会等名 The 3rd Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Distance sets in pseudo-Euclidean spaces
3. 学会等名 The 34th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Linked systems of symmetric group divisible designs
3. 学会等名 9th Slovenian International Conference on Graph Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 On tight 4-designs in Hamming association schemes
3. 学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Hadamard matrices and related combinatorics
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (招待講演)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order $n \equiv 2 \pmod{4}$
3. 学会等名 The 86-th KPPY Combinatorics Seminar
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Balancedly splittable Hadamard matrices
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 Complex spherical designs and codes
3. 学会等名 Design theory and Quantum information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 The maximum number of diamonds in tournaments
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Suda
2. 発表標題 On tight 4-designs in Hamming association schemes
3. 学会等名 Design Theory from the Viewpoint of Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 On tight 4-designs in Hamming association schemes
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第7回研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 On tight 4-designs in Hamming association schemes
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	谷口 哲至  (Taniguchi Tetsuji)  (90543728)	広島工業大学・工学部・准教授    (35403)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	Gavriilyuk Alexander  (Gavriilyuk Alexander)  (20897946)	島根大学・学術研究院理工学系・講師    (15201)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	University of Lethbridge			
その他の国・地域	National Central University	National Center for Theoretical Sciences		
クロアチア	University of Rijeka			
イラン	IPM			
韓国	釜山国立大学			
スロベニア	リュブリャナ大学			