

令和 6 年 6 月 1 日現在

機関番号：14501
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2023
課題番号：18K03398
研究課題名（和文）New aspects of cardinal invariants

研究課題名（英文）New aspects of cardinal invariants

研究代表者

Brendle Jorg (Brendle, Joerg)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：70301851

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：強制法の理論などの洗練された技法を用いて連続体の基数不変量などの実数の集合論のテーマについて研究を行った。連続体の基数不変量とは、ある性質を満たす実数全体の部分集合の最小の濃度として定義され、最小の非可算基数と連続体の濃度の間の値を取り得るものである。特に、有限台反復法と密接に関連する最先端の反復強制法の技術を開発することによって、幾つかの連続体の基数不変量の大小関係についての新しい無矛盾性結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

実数全体は数学における一番重要な構造である。実数の組み合わせ論的構造を説明するために幾つかの連続体の基数不変量が導入されたが、それらの基数不変量の間の大小関係は重要な問題となる。集合論の公理系のもとで二つの基数不変量の間の不等式を証明するか、強制法による無矛盾性結果により不等式が証明できないことを示すべきである。本研究はその大小関係に重要な貢献し、特に、無矛盾性証明を行うために必要な洗練された強制法の技術を開発した。

研究成果の概要（英文）：Using forcing theory and other sophisticated techniques we carried out research about cardinal invariants of the continuum and other topics of set theory of the real numbers. Cardinal invariants of the continuum are defined as the smallest size of sets of real numbers with a certain property and typically take values between the first uncountable cardinal and the cardinality of the continuum. In particular, by developing state-of-the-art iterated forcing techniques closely related to finite support iteration, we obtained new consistency results about the order relationship of various cardinal invariants of the continuum.

研究分野：集合論

キーワード：数学基礎論 集合論 計算可能性理論 トポロジー 測度論 強制法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

連続体の基数不変量とは、ある性質を満たす実数全体の部分集合の最小の濃度として定義され、実数の構造を説明するものである。多くの場合には最小の非可算基数 ω_1 と連続体の濃度 c の間の値を取り得るため、連続体仮説が成り立たない程度の尺度として考えられることができる。

基数不変量に関する基本的な問題は、それらの順序関係である。ZFC (集合論の標準公理系) のもとで不等式を確立するか、**強制法**を使用した無矛盾性証明によって不等式が証明できないことを示すべきである。特に、基数不変量の調査と強制法理論の間には密接で有益な相互関係がある。後者は前者に関する多くの独立性結果を確立するために用いられてきたが、前者に関する問題は、強制法の重要な新しい反復法の開発を推進した。

近年は、二つの刺激的な開発により、基数不変量の研究の範囲が大幅に拡大された。一方では、カントール空間 2^ω またはベール空間 ω^ω をそれらの一般化された**高度カントール空間** (higher Cantor space) 2^κ または**高度ベール空間** (higher Baire space) κ^κ (κ は非可算正則基数) に置き換えることで、多くの古典的な基数不変量がこのより一般的なコンテキストで再定義され、ZFC のもとの不等式と、強制法による独立性結果の両方のいくつかの古典的な結果が、しばしば非常に斬新な論法で再証明された。他方では、集合論における基数不変量と計算可能性理論における**高度性質**(つまり、チューリング次数が計算可能な次数と異なる程度を測る性質)の研究が数十年にわたって独立して進められてきたが、最近、これらの二つの分野の概念と証明方法の間に強い類似性があることが明らかになった。

2. 研究の目的

この研究プロジェクトの主な目的は、

- (1) **連続体の基数不変量** (cardinal invariants of the continuum)、
- (2) **高度の基数不変量** (higher cardinal invariants)、
- (3) **チューリング次数の高度性質** (highness properties of Turing degrees)、

およびこれらの三つのテーマの間の相互関係についての理解を深め、それらに関する新しい重要な結果を証明するとともに、これらの結果の証明に必要な強制法理論を開発することであった。

3. 研究の方法

最近の反復強制法理論からのアイデアをはじめ、組み合わせ論、計算可能性理論、トポロジーや測度論などの純粋数学の分野の最先端の技法を用いて、幾つかの重要な問題の解決に焦点を絞って、上記の三つのテーマについて研究を行ってきた。特に、有限反復法とそれに密接に関連する強制法構成について新しい保存定理を証明することによって連続体の基数不変量についての新しい無矛盾性結果を得た(例えば、研究成果の(1),(11)を参照)。また、テンプレート沿の反復法や shattered 反復法などの洗練された強制法の技術もより深く発展させた(研究成果の(2),(10)を参照)。さらに、高度の基数不変量の研究のために必要な強制法を開発した(研究成果(4)を参照)。

強制法の理論や基数不変量についての研究は、世界的に行われているため、海外の研究者との議論、特に共同研究は必要不可欠であった。研究の成果の多くは、Diego Mejía、Miguel Cardona、Lorenz Halbeisen、Lukas Klausner、Marc Lischka、Saharon Shelah、Vera Fischer、Yurii Khomskii、Osvaldo Guzmán、Michael Hrušák、Dilip Raghavan、Corey Switzer、Francesco Parente、Christina Brech、Márcio Telles や南裕明らのディスカッションや共同研究により得られた。

4. 研究成果

強制法の理論などの洗練された技法を用いて連続体の基数不変量などの実数の集合論のテーマについて研究を行った。主な研究成果は下記通りである。

(1) **強制法の行列沿の反復法と極大フィルター沿の極限 (matrix iterations and ultrafilter limits)**。Miguel Cardona (ウィーン大学) と Diego Mejía (静岡大学) との共同研究において、行列沿の反復強制法のコンテキストにおける filter-linked 半順序や filter-Knaster 半順序に基づいた洗練された保存技術を開発させた。また、これらの技術を用いて、極大のほとんど交わりがない集合族の保存や、Cichoń の図式における基数不変量などの多くの連続体の基数不変量の値が相異なるモデルの構成のために用いられてきた。さらに、依岡イデアルの四つの基数不変量が同時に異なる値を取り得ることが無矛盾であることを証明した。

(2) 漸近密度に関する基数不変量 (cardinal invariants related to asymptotic density)。Lorenz Halbeisen (チューリヒ大学)、Lukas Klausner (ウィーン工科大学)、Marc Lischka (チューリヒ大学) と Saharon Shelah (ヘブライ大学) との共同研究において、自然数全体の無限部分集合の共通部分に基づいて定義された幾つかの基数不変量を導入し、それらの基数不変量の大小関係について ZFC のもとの不等式も、強制法による独立性結果も示した。特に、コーエン強制法によって保存される、このコンテキストにおける極大の独立な集合族を構成することで、漸近密度に関連する independence number がコーエンモデルにおいて ω_1 であることを証明した。また、強制法のテンプレート沿の反復法という洗練された技術でこの independence number が漸近密度に関連する reaping number より真に大きいことが無矛盾であることを得た。さらに、このような極大の独立な集合族を付け加える強制法を導入することによって、同じテンプレートの枠組みにおいてこの independence number の共終度が可算であることの無矛盾性を証明した。

(3) 極大の独立な集合族の射影階層における定義可能性 (definability of maximal independent families in the projective hierarchy)。Vera Fischer (ウィーン大学) と Yuriy Khomskii (ハンブルク大学) との共同研究において、自然数上の極大の独立な集合族 (m.i.f.) の射影階層における定義可能性を調べた。 Σ_2^1 m.i.f. の存在と Π_1^1 m.i.f. の存在が同値であること、コーエンモデルにおいて射影的な m.i.f. が存在しないことと、Sacks モデルにおいて Π_1^1 m.i.f. が存在することを証明した。

(4) 退化の場合の高度の Cichoń の図式 (higher Cichoń diagram in the degenerate case)。を非可算正則基数とするとき、高度ベール空間 κ^κ の unbounding number $\mathfrak{b}(\kappa)$ 、dominating number $\mathfrak{d}(\kappa)$ と、高度の瘦イデアル $M(\kappa)$ の基数不変量の大小関係を調べることによって、加法数 $\text{add}(M(\kappa))$ と共終数 $\text{cof}(M(\kappa))$ の特徴づけを得た。また、幾つかの集合論のモデルを紹介することにより、退化の場合に一様性 $\text{non}(M(\kappa))$ の値に制限がないことを確立した。その上、一般化された dominating number $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$ について幾つかの ZFC のもとの結果と独立性結果を示した。

(5) 極大のほとんど交わりがない集合族の組み合わせ論的性質 (combinatorial properties of maximal almost disjoint families)。Osvaldo Guzmán (メキシコ国立自治大学モレリア校)、Michael Hrušák (メキシコ国立自治大学モレリア校) と Dilip Raghavan (シンガポール国立大学) との仕事において、自然数上の極大のほとんど交わりがない集合族 (m.a.d.) に生成されるイデアルのような自然数上のイデアルの強い組み合わせ論的性質について研究を行った。これらの性質は、コーエン強制法などの強制法による非破壊性とながっている。例えば、Shelah-Steprans イデアルがコーエン非破壊であり、ランダム非破壊であり、強い非破壊性を持つことを証明した。また、Shelah-Steprans m.a.d. 集合族やそれより強い raving m.a.d. 集合族などの強い組み合わせ論的性質を持つ m.a.d. 集合族の存在や非存在の強制法による幾つかのモデルを構成した。

(6) 高階次元の基数不変量 (higher dimensional cardinal invariants)。Corey Switzer (ウィーン大学) によって導入された、ベール空間 ω^ω からベール空間 ω^ω への関数からなる空間を説明する高階次元の基数不変量を Switzer との共同研究においてより深く調べた。独立性証明を行うことによって全ての高階次元の bounding number が連続体の濃度 \mathfrak{c} より真に小さいことが無矛盾であるが、全ての高階次元の dominating number が \mathfrak{c} 以上であることを証明した。一方では、コーエンモデル、ランダムモデル、Sacks モデルなどの古典的なモデルにおいて高階次元の bounding number の値を計算することによって、高階次元の Cichoń の図式に現れる大小関係以外、一つの場合を除いて、それらの基数不変量の間的大小関係がないことを確立した。他方では、高階次元の dominating number が一般化された dominating number $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$ と密接に関連しており、イデアルによらないが、関係によることを無矛盾性証明を用いて確証した。

(7) ブール代数上の極大フィルターの構造 (structure of ultrafilters on Boolean algebras)。Francesco Parente (神戸大学 (日本学術振興会外国人特別研究員) と トリーノ大学) との共同研究において、完備なブール代数上の極大フィルターの集合族の構造を組み合わせ論的な観点から調べた。まず、Tukey 可約性 (Tukey reducibility) の枠組みにおいて、Tukey 極大でない極大フィルターの存在や非存在について幾つかの結果を得た。(Tukey 極大な極大フィルターは常に存在する。) 例えば、 \mathfrak{c} 個のコーエン実数やランダム実数を付け加えられる完備なブール代数上の全ての極大フィルタが Tukey 極大であるが、完備なブール代数 B 上の極大フィルターを生成する最小の集合の濃度として定義されている ultrafilter number $\mathfrak{u}(B)$ が B の濃度より真に小さいとき Tukey 極大でない極大フィルターが存在する。このコンテキストにおいて、1 個のコーエン実数の付け加えるコーエン代数などの完備なブール代数 B の ultrafilter number

$u(B)$ が B の濃度より真に小さいことの無矛盾性を証明した。また、自然数上の P -point を一般化する coherent P -ultrafilter も Tukey 極大でないことを示すことによって、 $d=c$ のもとでコーエン代数などの完備なブール代数上に Tukey 極大でない極大フィルターが存在することがわかった。

次に、完備なブール代数上の極大フィルター上の Tukey 順序を、自然数上の極大フィルタ上の Rudin-Keisler 順序の、村上の順序と JPR 順序という二つのブール代数のコンテキストへの一般化と比べた。村上の順序は Tukey 順序よりも JPR 順序よりも強いが、JPR 順序と Tukey 順序が比較可能でないことがわかった。つまり、多くの無限完備なブール代数上に JPR 比較可能でない Tukey 極大の極大フィルターが存在し、連続体仮説のもとでコーエン代数上に Tukey 比較可能でない JPR 同値な極大フィルターが存在する。

(8) 有限台反復法に関連する現代の強制法の技術 (modern forcing techniques related to finite support iteration)。Research Trends in Contemporary Logic というブックプロジェクトのため、半順序の超ベキ、テンプレート沿の反復法、半順序のブール超ベキと、半順序の初等部分モデルへの制限という四つの、ccc 強制法の有限台反復法と密接に関連する洗練された最先端の強制法の技術についてのサーベイ論文を作成した。

(9) base matrix の高さ (heights of base matrices)。 h を $P(\omega)/\text{fin}$ の distributivity number とするとき、Balcar, Pelant と Simon の古典的な定理により高さ h の base matrix が存在する。連続体の濃度 c が正則基数のとき、高さ c の base matrix が存在することと、コーエンモデルやランダムモデルにおいて c 以下のあらゆる正則基数がある base matrix の高さとなることを証明するによって、Fischer, Koelbing と Wohofsky の問題を解決した。

(10) shattered 反復法と融合極限 (shattered iterations and amalgamated limits)。極限段階に有限台反復法で付け加わるコーエン実数の代わりにランダム実数を付け加える shattered 反復法という手法を開発し、Cichoń の図式に出る基数不変量についての新しい独立性結果を証明することによって Miller の問題を解決した。この手法の基本的な手段である、完備なブール代数の直極限と融合を一般化する融合極限とその位相的な解釈についてサーベイ論文を作成した。また、shattered 反復法の中心である狭義正の有限加法的な測度をもつ完備なブール代数をより深く調べ、これらの完備なブール代数についての融合極限による保存定理を証明した。

(11) 強零イデアルに関する基数不変量の分離 (separating cardinal invariants of the strong measure zero ideal)。Miguel Cardona (コシツエ大学) と Diego Mejía (静岡大学) との共同研究において、強制法の有限台反復法において強零イデアル SN の加法数 $\text{add}(SN)$ を制御する強制法の性質を発展させた。これらの技法を用いて、 $\text{add}(SN) < \text{cov}(SN) < \text{non}(SN) < \text{cof}(SN)$ の無矛盾性を証明し、初めて SN の四つの基数不変量が同時に分離できるモデルを構成した。また、この不等式が Cichoń's maximum と同時に成り立つ強制法によるジェネリックな拡大も作り出した。

(12) 自然数の部分集合の稠密性に関する基数不変量 (cardinal invariants related to density)。Christina Brech (サンパウロ大学) と Márcio Telles (リオデジャネイロ州立大学) との仕事において、自然数の置換群と自然数の部分集合の漸近密度に関する幾つかの基数不変量を導入し、それらの基数不変量と古典的な基数不変量の大小関係について ZFC のもとの様々な不等式も、強制法による様々な独立性結果も示した。特に、density number が瘦イデアル M の一様性 $\text{non}(M)$ と一致することを証明した。(準備中)

(13) 極大のほとんど交わりがない集合族の splitting number (splitting number of m.a.d. families)。南裕明 (愛知学院大学) との共同研究において、自然数上の極大のほとんど交わりがない集合族 A から生成されるイデアル $I(A)$ に対する splitting number が古典的な splitting number より真に小さいことが成り立つような A を強制法により作り出した。(準備中)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 13件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 BRENDLE JOERG, SWITZER COREY BACAL	4. 巻 88
2. 論文標題 HIGHER DIMENSIONAL CARDINAL CHARACTERISTICS FOR SETS OF FUNCTIONS II	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1421-1442
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2022.18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Parente Francesco	4. 巻 323
2. 論文標題 Orderings of ultrafilters on Boolean algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 108279 ~ 108279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2022.108279	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg	4. 巻 46
2. 論文標題 The higher Cichon diagram in the degenerate case	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 255-269
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21099/tkbjm/20224602255	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brendle Joerg	4. 巻 66
2. 論文標題 Base matrices of various heights	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 1237-1243
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439523000310	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brendle Joerg, Halbeisen Lorenz, Klausner Lukas, Lischka Marc, Shelah Saharon	4. 巻 174
2. 論文標題 Halfway new cardinal characteristics	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	6. 最初と最後の頁 103303
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apal.2023.103303	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg	4. 巻 2213
2. 論文標題 The amalgamated limit and its topological interpretation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brendle Joerg, Cardona Miguel A., Mejia Diego A.	4. 巻 172
2. 論文標題 Filter-linkedness and its effect on preservation of cardinal characteristics	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	6. 最初と最後の頁 102856 ~ 102856
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apal.2020.102856	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 BRENDLE JOERG, PARENTE FRANCESCO	4. 巻 87
2. 論文標題 COMBINATORICS OF ULTRAFILTERS ON COHEN AND RANDOM ALGEBRAS	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 109 ~ 126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2021.18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Blass Andreas, Brendle Joerg, Brian Will, Hamkins Joel David, Hardy Michael, Larson Paul B.	4. 巻 373
2. 論文標題 The rearrangement number	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 41 ~ 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7881	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Wohofsky Wolfgang	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Borel's conjecture for the Marczewski ideal	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Garcia Avila Luz Maria	4. 巻 5
2. 論文標題 Evasion and prediction V: Unsymmetric game ideals, constant prediction, and strong porosity ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 269 ~ 286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-018-0271-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Hrusak Michael, Torres-Perez Victor	4. 巻 58
2. 論文標題 Construction with opposition: cardinal invariants and games	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 943 ~ 963
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-019-00671-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Brian Will, Hamkins Joel David	4. 巻 247
2. 論文標題 The subseries number	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Fundamenta Mathematicae	6. 最初と最後の頁 49 ~ 85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/fm667-11-2018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Fischer Vera, Khomskii Yurii	4. 巻 147
2. 論文標題 Definable maximal independent families	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3547 ~ 3557
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14497	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg, Brooke-Taylor Andrew, Friedman Sy-David, Montoya Diana Carolina	4. 巻 225
2. 論文標題 Cichon's diagram for uncountable cardinals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 959 ~ 1010
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-018-1688-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brendle Joerg	4. 巻 57
2. 論文標題 Maximal trees	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 421 ~ 428
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-017-0575-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 BRENDLE JOERG、FARKAS BARNABAS、VERNER JONATHAN	4. 巻 83
2. 論文標題 TOWERS IN FILTERS, CARDINAL INVARIANTS, AND LUZIN TYPE FAMILIES	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1013 ~ 1062
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2017.52	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Recent forcing techniques: Boolean ultrapowers (mini course)
3. 学会等名 Recent Developments in Set Theory of the Reals, RIMS workshop, 京都 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Complexity of maximal objects
3. 学会等名 Program on Higher Recursion Theory and Set Theory (in celebration of the research work of Professors Theodore A. Slaman and W. Hugh Woodin), シンガポール (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Forcing and cardinal invariants (minicourse)
3. 学会等名 12th Young Set Theory Workshop (Advanced Class in Set Theory), ウィーン (オーストリア) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Higher cardinal invariants in the degenerate case
3. 学会等名 7th European Set Theory Conference, ウィーン(オーストリア)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Asymptotic cardinal invariants
3. 学会等名 15th International Workshop in Set Theory, マルセイユ(フランス)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Cardinal invariants and forcing theory
3. 学会等名 The 3rd Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications, 成都(中国)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Brendle Joerg
2. 発表標題 Maximal objects and definability: a survey
3. 学会等名 Chinese Annual Conference on Mathematical Logic 2019, 重慶(中国)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Definability of maximal independent families
3. 学会等名 Ideals and exceptional sets in Polish spaces, Bernoulli Center, Lausanne, Switzerland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Some problems about cardinal invariants
3. 学会等名 Set theory today. A conference in honor of Georg Cantor, Kurt Goedel Research Center, Vienna, Austria (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Maximality and Definability
3. 学会等名 Colloquium Logicum 2018, Bayreuth, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Maximal objects in the projective hierarchy
3. 学会等名 Reflections on Set Theoretic Reflection, in celebration of Joan Bagaria 's 60th birthday, Sant Bernat, Montseny, Spain (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Higher dimensional cardinal characteristics
3. 学会等名 Set-theoretic Topology, Oaxaca (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Joerg Brendle
2. 発表標題 Forcing and more
3. 学会等名 Colloquium in honor of Martin Goldstern on the occasion of his 60th birthday, Vienna (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	トリノ大学			
ブラジル	サンパウロ大学			
スロバキア	コシツェ大学			
オーストリア	ウィーン大学	ウィーン工科大学		
メキシコ	メキシコ国立自治大学	メキシコ自治工科大学		

共同研究相手国	相手方研究機関			
シンガポール	シンガポール国立大学			
フランス	パリ第7大学			
中国	四川大学			
ニュージーランド	ヴィクトリア大学ウェリントン	オークランド大学		
スイス	チューリッヒ工科大学			