

令和 6 年 9 月 9 日現在

機関番号：22302

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03400

研究課題名（和文）限定算術における強制法の応用

研究課題名（英文）Applications of forcing in bounded arithmetic

研究代表者

黒田 覚（Kuroda, Satoru）

群馬県立女子大学・文学部・教授

研究者番号：30300586

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において、竹内外史と安本雅洋が提案した、限定算術の超準モデル上での強制法の理論を体系的に整備し、従来は多項式時間計算可能クラスとの関係においてのみ示されていた結果を、そのいくつかの部分クラスでも同様に示した。
また、従来理論においては極めて弱い論理式のクラスの扱いのみが示されており、例えば鳩の巣原理のような命題のモデルにおける取り扱いについては不可能であったが、より強い論理式を扱う方法を与えた。
さらに、独立命題の候補について考察し、線形代数学におけるいくつかの命題のよわい算術体系における証明可能性を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において得られた結果は、限定算術におけるモデルの考察に新たな視点と方法を与えるものであり、必ずしも体系的な方法が与えられていなかったこの分野に大きく貢献するものである。
また、ここで得られた計算量クラスと限定算術体系との関係は、理論計算機科学においてもいくつかの示唆を与えており、複合的な分野にまたがった貢献が期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research, we reformulate the theory of forcing on nonstandard models of bounded arithmetic which was first developed by Gaisi Takeuti and Hiromasa Yasumoto and extend the relation between generic models and polynomial time computable classes to its subclasses. We also extend the theory to treat the satisfiability of the strength of formulas and as a consequence, we gave a condition on which a version of pigeonhole principle is satisfied in generic extensions.
Moreover, we considered the provability of propositions of linear algebra which aims to find candidate independent statements.

研究分野：数理論理学

キーワード：限定算術 計算量理論 超準モデル

1. 研究開始当初の背景

限定算術は計算量理論との関連で、1980年代から活発に研究が行われてきた。その主たる問題の一つに、与えられた算術体系で証明不可能な数学的命題を見出すことがある。

この問題に対しては、一般的にその命題を否定するようなモデルを構築することであり、その方法を用いて M.Ajtai が鳩の巣原理を否定するようなモデルを、集合論における、強制法を応用して実現した。この研究が発端となって、強制法を応用するモデルの構成が研究され得るようになり、竹内外史と安本雅洋がブール値モデルを構成する方法を提案した。しかしながら、彼らの方法にはいくつかの不備があったため、その後の研究の進展が妨げられていた。

2. 研究の目的

竹内と安本によるブール値モデルの構成を精査し、その不備を修正しつつ、この方法の適用範囲を拡張することを目的とした。当初のモデルの構成は、多項式時間計算可能クラスに対応する算術体系についてのもののみであったが、この手法は、多項式サイズの命題論理式などの部分クラスにも適用が可能なものであるため、そのことを考慮した一般化を目指した。また、この方法で議論できる論理式の複雑さにも当初は制限があったので、その点を改善し、より強い論理式の、ブール値モデルにおける真偽を判定できるように改良するということも目標とした。

3. 研究の方法

竹内と安本による論文

"Forcing on Bounded Arithmetic", Gödel '96 Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics - Kurt Gödel's Legacy, pp. 120 - 138

を精査し、その不備を修正しながら再構築する。次に、そこに示されたモデル構成のアイデアをもとに、多項式時間計算可能クラスの部分クラスに対応する算術のモデル構築を行う。

また、Jan Krajicek により以下の論文で与えられている類似の強制法が竹内と安本の方法でも可能であるかどうかについて考察する。

"Extensions of models of PV", in: Logic Colloquium'95, Eds. J.A.Makowsky and E.V.Ravve, ASL/Springer Series {em Lecture Notes in Logic}, Vol. {bf 11}, (1998), pp.104-114.

"On Frege and Extended Frege Proof Systems", in: "Feasible Mathematics II", eds. P. Clote and J. Remmel, Birkhauser, (1995), pp. 284-319.

さらに、鳩の巣原理などの組み合わせ論的命題が上記の方法で構築されたブール値モデルで成り立つための条件について考察する。

4. 研究成果

竹内と安本によるブール値モデルの構成法を整備し、多項式サイズのブール値回路をもとにしたモデルに加えて、以下のブール代数上でブール値モデルを構成し、それらに対応する算術体系のモデルになることを証明した。

1. 多項式サイズ命題論理式
2. 多項式サイズ分岐プログラム
3. 多項式サイズ推移閉包論理式

これらはそれぞれ NC1, LOGSPACE, 及び NLOGSPACE に対応している。

次にこれらによって構成されるモデルと、計算量クラスの分離問題との関係を以下のように与えた。

1.元のモデルで $P=NP$ ならば、多項式サイズのブール値回路によるブール値モデルで NP 論理式についての数学的帰納法が成り立つ。

2. 元のモデルで $P=NC1$ ならば, 多項式サイズの命題論理式によるブール値モデルで NP 論理式についての数学的帰納法が成り立つ.

また, 多項式時間階層の 2 番目のレベルに相当する論理式のブール値モデルにおける振る舞いについて調べ, それと鳩の巣原理との関連を示した.

さらに Krajicek による以下のモデルの構成が, 竹内と安本の方法でも可能であることを示した.

1. 元のモデルで P と NP が分離されるなら, 多項式サイズのブール値回路によるブール値モデルで NP と co-NP を分離できる.
2. 元のモデルである命題論理式の拡張フレーゲ証明が存在しないなら, 多項式サイズのブール値回路によるブール値モデルでその否定が充足可能であるようにできる.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Satoru Kuroda | 4. 巻 1 |
| 2. 論文標題 Takeuti-Yasumoto Forcing Revisited | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Proceedings of the 9th International Conference on Computability Theory and Foundations of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 123-155 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/9789811259296_0006 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 黒田覚 |
| 2. 発表標題 Linera Algebra in Bounded Arithmetic |
| 3. 学会等名 証明と計算の理論と応用 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Satoru Kuroda |
| 2. 発表標題 On Takeuti-Yasumoto forcing |
| 3. 学会等名 Logic Colloquium 2019 (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 黒田覚 |
| 2. 発表標題 Forcing on bounded arithmetic for three sort and related theories |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究「証明論とその周辺」 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Satoru Kuroda |
| 2. 発表標題 Forcing in bounded arithmetic for small complexity classes |
| 3. 学会等名 Computability Theory and Foundations of Mathematics 2019 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Satoru Kuroda |
| 2. 発表標題 On Takeuti-Yasumoto forcing |
| 3. 学会等名 Logic Colloquium 2019 (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|